PROBABILITÉS & MOYENNES

GÉOMÉTRIQUES

PAR

EMMANUEL CZUBER,

Professeur à l'école supérieure polytechnique de Vienne.

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR

HERMAN SCHUERMANS,

du Corps d'État-Major Belge.

Préface de

CHARLES LAGRANGE,

Membre de l'Académie royale des Sciences de Belgique.

115 FIGURES DANS LE TEXTE.

PARIS

Librairie Scientifique A. HERMANN

Libraire de S. M. le Roi de Suède et Norwège.

6 ET 12, RUE DE LA SORBONNE, 6 ET 12

Gand, impr. Eug. Vander Haeghen, 60, rue des Champs

1902

PRÉFACE

I. — L'ouvrage du Prof. E. Czuber, dont M. le Cap^e Schuermans donne aujourd'hui la traduction [1], a pour objet principal de grouper dans un cadre synthétique la classe nombreuse des problèmes de probabilités où intervient la notion de l'infini; c'est-à-dire ceux dans lesquels, sans pouvoir déterminer séparément les nombres de chances possibles et favorables, on peut, en général par un passage à la limite, trouver le rapport de ces nombres, ou la probabilité cherchée.

Ces questions ont pour type le célèbre et classique *Problème de l'Aiguille,* proposé et résolu déjà par Buffon, il y a plus d'un siècle, dans son *Essai d'Arithmétique morale.* Pour la plupart d'entre elles, ou bien les données sont d'ordre géométrique, ou les énoncés sont susceptibles de représentation géométrique. Ce caractère géométrique a attiré la pensée de l'auteur et dicté pour lui la définition du sujet et le titre du livre. Fidèle à son argument, il examine successivement les problèmes qui se rapportent au point, à la droite et au plan. La portée de ces questions n'est d'ailleurs pas uniquement spéculative; comme presque partout ailleurs en probabilités, l'exploration métaphysique abstraite voisine avec la préoccupation d'une application concrète et utilitaire. Si l'on voulait de cela un exemple, il suffirait de mentionner l'application des probabilités par intégrales définies aux questions pratiques du tir.

---

(1) *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte,* Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1884.

II. — L'exposé didactique de la matière précédente ne constitue qu'une première partie de l'ouvrage. La seconde partie n'expose pas des questions de probabilités proprement dites, mais elle traite d'une notion capitale en connexion intime avec leurs applications. Il s'agit de la *Moyenne*, base des problèmes statistiques. On se propose ici la détermination d'une grandeur propre à représenter par un terme unique une collection donnée de grandeurs de même espèce. Ce n'est pas dans la *Statistique* proprement dite seulement que cette question se présente avec un but utile; on la rencontrerait dans toutes les branches des sciences appliquées. Telles seraient par exemple : en Physique ou en Astro-Physique la détermination de l'intensité moyenne d'un rayonnement (lumineux ou autre) sur une surface, dans des conditions données; en Géodésie, la question de l'éloignement moyen de deux triangles, des points d'un triangle à un sommet, etc.. Suivant l'ordre spécial de son sujet, c'est encore dans le domaine géométrique que l'auteur cherche et multiplie les exemples. En familiarisant l'esprit avec l'importante notion de la Moyenne, cette seconde partie constitue une utile préparation à la Théorie des erreurs (1); à cette théorie touchait d'ailleurs déjà aussi, incidemment et par quelques problèmes, la première partie.

Nous observerons, en manière de parenthèse, que d'autres points, côtoyés ou même compris par le sujet, seraient dignes d'un développement plus étendu ou plus approfondi. Telle serait la question, ici fondamentale, de la représentation d'une collection de points par une surface. L'élucidation du paradoxe présenté par certains problèmes, qui semblent admettre pour la probabilité renseignée plusieurs solutions, gagnerait par l'usage systématique et l'énoncé explicite du

---

(1) M. le Capᵉ Schuermans a aussi entrepris et à très peu près terminé la traduction d'un autre ouvrage du Prof. Czuber sur ce dernier sujet (Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig, 1891), particulièrement intéressant par l'exposé historique des différents essais relatifs à la théorie des erreurs. Il est fort à désirer que ce nouveau travail du traducteur soit aussi publié.

principe fondamental de l'égale *possibilité* des chances, principe qu'il suffit de respecter dans chaque cas pour que ce prétendu paradoxe disparaisse de lui-même. De même on pourrait désirer pour quelques solutions l'emploi explicite du théorème de la Probabilité totale, et la décomposition de celle-ci au moyen des probabilités des différentes *manières* et des probabilités de l'événement considéré *dans ces manières.*

III. — Pris en lui-même, l'ouvrage actuel est essentiellement théorique. Pour défendre sa valeur pratique, redisons, comme déjà plus haut, qu'un point de vue inexact et très superficiel pourrait seul conduire à envisager le calcul des probabilités, même dans sa partie la plus abstraite, comme une sorte de hors d'œuvre d'une portée et d'un intérêt purement spéculatifs : il est au contraire l'expression précise et nécessaire d'une science pratique, antérieure aux traités didactiques et, comme d'autres sciences, imposée par la nature des choses. De tout temps les hommes ont fait des probabilités, tout comme ils ont fait de la géométrie et de la mécanique avant qu'il existât des livres de géométrie et des traités de mécanique rationnelle. C'est même, on peut le dire, ce *caractère humain* des probabilités, qui, indépendamment de leurs applications pratiques et effectives, explique et justifie l'intérêt pédagogique de leur enseignement.

Pascal se moquait de l'esprit géométrique sans finesse qui *prend son interlocuteur pour une proposition.* En probabilités, on pourrait, en appuyant sur l'idée, presque retourner le mot; car en chaque proposition on trouve un interlocuteur qui, sous des faces variées, scrute et exerce le jugement, et lui demande en quelque manière plus que de la géométrie.

C'est à ce point de vue intégral qu'il faut se placer pour apprécier, dans l'enseignement, la valeur et le rôle d'un ouvrage de la nature de celui-ci. Par son recueil aussi nombreux que varié de problèmes et d'exercices bien choisis, il y constituera un auxiliaire précieux, et, à ce seul titre pratique, il méritait indubitablement la peine qu'a prise son laborieux et savant traducteur.

Ch. Lagrange.

PROBABILITÉS & MOYENNES GÉOMÉTRIQUES

PAR

EMMANUEL CZUBER,

Professeur à l'école supérieure polytechnique de Vienne.

AVANT-PROPOS

Le présent livre est le premier essai d'une exposition méthodiquement résumée de l'embranchement le plus récent du calcul des probabilités : la théorie des probabilités géométriques.

La première introduction de rapports de grandeurs géométriques dans le domaine du calcul des probabilités se remarque, sans doute, déjà vers le milieu du siècle passé, dans quelques questions posées et résolues par BUFFON dans son " Essai d'arithmétique morale ": une de ces questions, appelée plus tard le problème de l'aiguille, avec une question similaire plus difficile, a été insérée aussi par LAPLACE dans son œuvre monumentale. Longtemps on se tint à ces problèmes détachés; c'est seulement dans les dernières dizaines d'années que le sujet a été repris. Plusieurs mathématiciens anglais bien connus et quelques mathématiciens français s'en occupèrent surtout avec une certaine prédilection, et ont donné dans différentes publications spéciales de nombreux travaux s'y rapportant. Nous mentionnerons : le Colonel A. R. CLARKE, H. MC'COLL, E. B. SEITZ, J. J. SYLVESTER, S. WATSON, Rev.

J. Wolstenholme, W. S. B. Woolhouse, dont les travaux ont été publiés dans l'Educational Times; puis E. Barbier, C. Jordan, E. Lemoine, L. Lalanne, qui, dans le Journal de Liouville, dans les Comptes rendus et dans d'autres recueils, ont donné des études témoignant de la compétence de leurs auteurs. Mais à leur tête doit être placé M. W. Crofton, professeur à l'Académie de guerre de Woolwich, lequel, abstraction faite de plusieurs articles peu étendus, a traité dans un mémoire fondamental (dans les Philosophical Transactions de 1868), les problèmes de la probabilité géométrique qui se rapportent à une droite menée arbitrairement et à des plans disposés arbitrairement. Les méthodes de Crofton se distinguent par l'élégance et par un haut degré de généralité; à lui aussi revient le mérite d'avoir introduit dans l'analyse, spécialement dans le calcul intégral, ces méthodes comme un nouvel auxiliaire et donné par là à cet objet un intérêt plus général.

Quant aux moyennes géométriques qui forment la seconde partie, la moins étendue, du livre, leur considération est pleinement justifiée par les étroites relations qui existent entre elles et les probabilités géométriques. Bases et méthodes leur sont communes; en outre, la solution de certains problèmes peut trouver avantage dans la transposition des points de vue propres à ces deux domaines.

Dans la première partie, les formes élémentaires de l'espace : point, droite, plan, ont été choisies pour argument de subdivision. Dans ces parties principales et dans leurs parties secondaires, les problèmes ont été ordonnés tant d'après le degré de leur difficulté que d'après les méthodes de leur résolution. Dans la seconde partie, une division explicite a été écartée; cependant ici encore l'étude des valeurs moyennes des lignes précède celle des surfaces et, pour le surplus, les méthodes sont prises pour argument d'ordre.

Je tiens, en terminant, à remercier Messieurs les docteurs C. Ohrtman et Félix Müller, de Berlin, pour l'amitié avec laquelle ils m'ont aidé de leurs connaissances littéraires, et l'éditeur lui-même pour le soin qu'il a apporté à l'impression du livre.

Prague, mai 1884.

L'AUTEUR.

TABLE DES MATIÈRES

Première Partie :

Probabilités géométriques.

Deuxième Partie :

Moyennes géométriques.

PREMIÈRE PARTIE.

Probabilités géométriques.

Introduction.

1. Les questions habituelles sur la probabilité à priori se rapportent à des TOTALITÉS DISCRÈTES de cas favorables et de cas possibles; le quotient des nombres de ces cas respectifs donne la probabilité demandée.

Il est toujours permis alors de percevoir la totalité des cas par un amas de boules, ces boules se différenciant par quelques caractères les unes des autres, le plus simplement par des numéros d'ordre écrits; ainsi, chaque boule individualisée est désignée et est différenciée des autres par son numéro d'ordre, et en prenant les numéros d'ordre pour les remplaçants des boules, on représente la totalité des cas par une totalité discrète de nombres, ou de combinaisons de nombres, selon que l'événement dont la probabilité est requise peut être ramené au tirage d'une boule ou de plusieurs boules.

A côté des questions de cette espèce, on trouve d'autres questions qui se rapportent à des TOTALITÉS continues ou CONCRÈTES de cas possibles et de cas favorables. Ce sont les problèmes du calcul des probabilités dans lesquels les cas possibles et les cas favorables se laissent représenter analytiquement par des valeurs ou par des combinaisons de valeurs de grandeurs continûment variables; ils forment en conséquence dans leurs totalités des variétés continues, d'étendue simple ou multiple; ils existent en nombre illimité.

Si, pour commencer par le cas le plus simple, on demande : quelle est la probabilité pour qu'un point pris arbitrairement dans une droite donnée remplisse certaines conditions? Tous les points de la droite représentent la totalité des cas possibles, et les points satisfaisant aux conditions imposées la totalité des cas favorables. Maintenant un point est-il caractérisé par ceci : on cote, rapportée à quelque unité, sa distance x à une extrémité? Tous les points de la droite sont représentés par toutes les valeurs de la variable x entre 0 et a (a est la longueur de la droite mesurée avec la même unité), c'est-à-dire sont représentés par une variété continue simplement étendue, et les points qui correspondent aux conditions proposées le sont par une seconde variété semblable, dont la délimitation résulte de ces conditions.

La question de la probabilité exige-t-elle qu'un point pris à volonté dans une surface plane, limitée, satisfasse à certaines conditions? On se représente la figure rapportée à un système de coordonnées rectangulaires, disposé dans son plan et on désigne les coordonnées d'un de ses points par x, y; tous les points de la figure sont représentés par la variété continue doublement étendue des variables x, y, variété dont la délimitation résulte du périmètre de la figure; les cas favorables à l'événement en question le sont par une variété de même forme, dont la délimitation doit être déduite des conditions que le point a à remplir.

En général, la probabilité doit-elle s'évaluer pour qu'une grandeur géométrique, dépendante de n variables indépendantes, satisfasse à certaines exigences? A la totalité de tous les cas possibles, correspond une variété des n variables, continue, n fois étendue, de délimitation donnée; aux cas favorables, une variété semblable, dont la délimitation est à déduire d'abord des exigences présentées.

2. De semblables probabilités qui ont rapport à des corrélations géométriques ont été appelées PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES (1). Mais au point de vue analytique, toutes les

(1) LOCAL PROBABILITY, GEOMETRICAL PROBABILITY sont les dénominations employées par des mathématiciens anglais (v. CROFTON, *Philos. Transactions*, vol. 158, page 181).

probabilités qui dépendent de grandeurs continûment variables, sont à compter ici; par conséquent particulièrement aussi les probabilités qui elles-mêmes servent de relations entre des nombres variables de manière continue.

3. La solution analytique de pareilles questions a pour base une proposition générale qui doit être développée aussitôt pour le cas de deux variables indépendantes.

K désigne-t-il le domaine donné des combinaisons possibles des valeurs des variables x, y; K', le domaine dérivé des conditions de la question, des combinaisons favorables à l'événement des valeurs des variables x, y? La probabilité demandée est une fraction dont le numérateur énonce la quantité des combinaisons de valeurs dans le domaine K' et dont le dénominateur énonce la quantité des combinaisons de valeurs dans le domaine K.

Comme le problème doit être réalisé, dans le cas présent il peut toujours être revêtu d'un habillement géométrique; c'est-à-dire que l'on considère x, y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, de manière qu'aux domaines K, K' correspondent des parties (des deux côtés une ou plusieurs) délimitées de ce plan; aux cas favorables, des points dans la surface K'; aux cas possibles, des points dans K; la probabilité en question apparaît maintenant comme le quotient du nombre des points qui tombent dans la partie K' du plan et du nombre des points qui se trouvent dans K.

Attribue-t-on aux variables x, y des séries discrètes de valeurs, désigne-t-on deux valeurs se suivant l'une l'autre de la première série par x_α, $x_{\alpha+1}$, de la seconde série par y_β, $y_{\beta+1}$, pose-t-on leurs différences positives

$$x_{\alpha+1} - x_\alpha = \Delta x_\alpha, \; y_{\beta+1} - y_\beta = \Delta y_\beta?$$

La valeur limite, de laquelle s'approche la somme étendue au domaine K,

$$\sum_\alpha \sum_\beta \Delta x_\alpha \Delta y_\beta,$$

pour des valeurs constamment décroissantes de Δx_α, de Δy_β, est représentée par l'intégrale double, étendue au même domaine

$$\int\int dx\, dy.$$

Géométriquement, à ce développement correspond une décomposition du domaine K en rectangles par des parallèles aux axes; $\Delta x_\alpha \, \Delta y_\beta$ signifie l'aire d'un des rectangles, $\sum\limits_\alpha \sum\limits_\beta \Delta x_\alpha \, \Delta y_\beta$, la somme de toutes les aires des rectangles.

Mais les valeurs de x, y sont-elles choisies toutes de manière qu'elles soient des multiples d'une fraction $\frac{1}{M}$ formée de l'unité et d'un certain nombre entier M, les différences des valeurs voisines par conséquent toujours et partout sont-elles égales à $\frac{1}{M}$? Alors apparaît le domaine K du plan décomposé en carrés de la superficie $\frac{1}{M^2}$ et si Z est leur nombre, on a

$$\sum_\alpha \sum_\beta \Delta x_\alpha \, \Delta y_\beta = \frac{Z}{M^2};$$

la décroissance des différences Δx, Δy est amenée par la croissance constante du nombre M; donc

$$1) \qquad \int\int dx\, dy = lim \frac{Z}{M^2},$$

pour une M constamment croissante. Maintenant Z est identique manifestement au nombre des points qui sont produits dans la décomposition décrite du domaine K par les intersections réciproques des lignes de division de celui-ci, pendant que l'intégrale du premier membre exprime l'aire de K. L'équation 1) signifie par conséquent :

La valeur limite de la fraction $\frac{Z}{M^2}$ dont le numérateur énonce le nombre des points tombant dans le domaine K, égale, pour un nombre M croissant sans fin, l'aire du domaine K.

Étend-on la même considération au domaine K' des cas favorables et désigne-t-on le nombre des points tombant dans celui-ci par Z'? On a aussi ici

$$2) \qquad \int\int dx\, dy = lim \frac{Z'}{M^2},$$

l'intégration étendue à K'.

La probabilité, par conséquent, est

$$3) \qquad p = lim \frac{Z'}{Z} = \frac{lim \frac{Z'}{M^2}}{lim \frac{Z}{M^2}} = \frac{\text{aire du domaine } K'}{\text{aire du domaine } K}.$$

L'avantage de la considération intuitive géométrique existe aussi pour une variable indépendante et pour trois variables indépendantes et l'on est conduit à des propositions analogues, récapitulées dans la proposition suivante :

Le rapport des quantités des points renfermés dans deux lignes, dans deux surfaces, dans deux espaces, est exprimé respectivement par le rapport des longueurs de ces lignes, des aires de ces surfaces, des volumes de ces espaces. Quand il y a plus de trois variables, il est vrai, l'interprétation géométrique n'existe plus, mais l'analyse demeure en principe la même et fournit le résultat suivant.

Une probabilité dépend de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots.. x_n$; K est le domaine donné des combinaisons possibles des valeurs, K' le domaine dérivé des conditions de la question, des combinaisons favorables des valeurs.

On imagine, attribuées aux variables, des valeurs qui forment des séries arithmétiques avec la commune raison $\frac{1}{M}$. Z, Z' sont les nombres des combinaisons des valeurs, lesquelles combinaisons, par pareilles mesures, s'ensuivent dans K, K'. Alors pour une M constamment croissante, on a

$$4) \qquad lim \frac{Z}{M^n} = \int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

l'intégration étendue au domaine K [1],

---

(1) Comparer au traité d'analyse de R. Lipschitz, tome II, pag. 544 et 562, et aux articles de Lejeune Dirichlet, dans le journal de Crelle, tome 19, page 392 et tome 24, page 356 et pages suivantes.

$$5) \qquad lim \frac{Z'}{M^n} = \int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n ,$$

l'intégration étendue au domaine K'; la probabilité demandée égale, par conséquent,

$$p = lim \frac{Z'}{Z} = \frac{lim \frac{Z'}{M^n}}{lim \frac{Z}{M^n}} = \frac{\int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \text{ (domaine } K')}{\int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \text{ (domaine } K)} .$$

Par analogie avec les cas d'1, de 2, de 3 variables, on peut appeler l'intégrale n fois étendue à la variété K,

$$\int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n ,$$

le CONTENU DU DOMAINE K; p s'écrit alors sous la forme :

$$6) \qquad p = \frac{\text{contenu du domaine } K'}{\text{contenu du domaine } K} .$$

En conséquence, le contenu d'un domaine de n *variables peut être envisagé comme une mesure du nombre des combinaisons des valeurs, lesquelles combinaisons constituent ce domaine.*

L'établissement d'une probabilité dépendante d'une ou de plusieurs grandeurs variables de manière continue, conduit donc à l'évaluation du contenu de deux variétés continues de même nombre d'étendues, c'est-à-dire à l'évaluation de deux intégrales définies plusieurs fois.

4. En dehors de la méthode générale développée actuellement, il y en a encore beaucoup d'autres qui évitent complètement ou qui simplifient essentiellement l'évaluation des intégrales. D'un autre côté, l'emploi de ces méthodes conduit à des propositions sur les intégrales définies, propositions, qui abordées autrement, ne seraient pas faciles à établir avec la même généralité. Par cela, cette branche du calcul des probabilités entre en relation importante et remarquable avec le calcul intégral.

Les méthodes particulières sont si variées, qu'il n'est guère possible d'apprendre à les connaître que par leur application à des problèmes particuliers. L'une des plus importantes consiste dans l'emploi des moyennes géométriques qui s'enchainent aux probabilités géométriques par ce qu'à celles-là comme à celles-ci, des totalités continues de formes géométriques (ou des totalités continues de valeurs) servent de base. Aussi ici une corrélation existe, pendant qu'inversement la détermination de moyennes peut être souvent ramenée avantageusement à la découverte de probabilités.

5. Il est avancé itérativement que des problèmes sur des probabilités et des moyennes géométriques ont trouvé des solutions différentes. La cause de ce fait gît toujours dans l'interprétation différente de la notion du mot " arbitrairement „ dont la signification, en réalité, n'est pas toujours tellement claire qu'elle exclut les divergences de conception.

Prendre " arbitrairement „ un point dans une droite donnée permet l'unique sens : la distance du point à un point fixe de la droite peut recevoir TOUTE valeur que les limites de la droite tolèrent, et TOUTE VALEUR AVEC LE MÊME DEGRÉ DE POSSIBILITÉ.

Mais déjà la demande de prendre " arbitrairement „ un point dans une ligne courbe donnée, peut être interprétée et réalisée différemment; ou elle peut être comprise : prendre un point dont la distance à un point fixe de la courbe, distance mesurée le long de celle-ci, peut avoir toute valeur admissible en raison de l'étendue de la courbe, ou : prendre un point dont l'abscisse — lorsque la courbe est représentée par son équation en coordonnées rectangulaires — peut prendre toute valeur admissible, et, dans les deux cas, toute valeur admissible avec le même degré de possibilité.

Pendant que dans le premier cas, l'arc de courbe est la variable qui forme à la fois une variété continue des cas favorables et des cas possibles, dans l'autre cas c'est l'abscisse et l'on doit être conduit à des résultats différents selon que l'on se décide pour l'une ou pour l'autre interprétation.

Il résulte de cet examen que l'interprétation du mot " arbitrairement „ s'accorde avec le choix des variables indépendantes.

Où le sens ne découle pas incontestablement des termes du problème, il peut toujours se discuter quelle interprétation correspond le mieux à la nature de la chose.

PREMIER CHAPITRE.

Points pris arbitrairement.

6. Théorème I. *Le nombre des points dans une ligne, dans une surface, dans un espace, d'étendue donnée, est mesuré respectivement par la longueur de la ligne, par le contenu de la surface, de l'espace.*

La preuve se trouve dans les propositions du n° 3 de l'introduction; mais cette preuve peut être faite d'une manière indépendante comme suit : on imagine dans la ligne, dans la surface, dans l'espace, des points pris à volonté; avec leur nombre croissant, leur distribution tend toujours de plus en plus vers la distribution uniforme dans la ligne, etc., et leur distribution atteint cette distribution uniforme lorsque le nombre des points devient infini. On a à se représenter dès lors la totalité des points, à laquelle appartient un point pris arbitrairement, de manière que des parties égales, petites à volonté, de la ligne, etc., contiennent également autant de points ou que les quantités des points des parties inégales sont entre elles comme les grandeurs de ces parties.

La représentation de la compacité, de la densité uniforme des points ne coïncide pas nécessairement avec la représentation d'une distribution régulière de ceux-ci, mais est simplifiée et dégagée. La considération sur laquelle la preuve des propositions générales du n° 3 s'édifie, part en réalité d'une distribution régulière des points (généralement, des combinaisons des valeurs des variables); les points dans une droite sont équidistants et ont la distance réciproque $\frac{1}{M}$; les points dans une surface plane forment les angles d'un réseau de carrés également grands de la superficie $\frac{1}{M^2}$; les points dans l'espace apparaissent comme des angles de cubes également grands du volume $\frac{1}{M^3}$. Et cette disposition régulière demeure lors du passage à la limite, c'est-à-dire avec M croissant infiniment.

On parle souvent d'un point quelconque d'une ligne courbe dans un autre sens que celui qui correspondrait au théorème I. Par celui-ci, un point de la courbe est à caractériser par la distance d'arc s comptée à partir d'un point fixe; si l'on accorde à s des valeurs qui sont des multiples de la fraction $\frac{1}{M}$, par cela, sur la courbe, est indiquée une série de points, uniforme, qui demeure uniforme lorsque M croît au delà de toutes limites.

Mais la courbe, rapportée à un système de coordonnées rectangulaires, est-elle représentée par l'équation

$$y = F(x)$$

et regarde-t-on, comme " quelconque ", un point qui correspond à une valeur quelconque de x? On donne, en raison de cela, par une série des valeurs de x, série dont les valeurs séparées sont les multiples se suivant l'un l'autre de la fraction $\frac{1}{M}$, sur la courbe, une série non uniforme de points, qui aussi ensuite demeure non uniforme, lorsque M croît à l'infini.

De nouveau d'autres séries de points correspondraient à la représentation de la courbe par les équations

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u)$$

ou par l'équation polaire

$$r = \chi(\theta),$$

si chaque fois le point correspondant à une valeur quelconque de u, relativement de θ, de la courbe, est interprété comme pris arbitrairement.

Que l'on doive parvenir à des résultats différents lorsqu'on résout le même problème en ayant égard à l'une ou à l'autre de ces différentes totalités de points, se comprend de soi-même.

Deux, trois, ... points sont-ils à prendre arbitrairement dans une ligne, dans une surface ou dans un espace? On imagine un point pris tout d'abord; puis, indépendamment de celui-ci, un deuxième; ensuite un troisième point. ...... Le nombre des complexes de points est mesuré alors par la deuxième, troisième ...... puissance du nombre qui évalue la grandeur de la ligne, etc.. De plus, il faut observer qu'un groupe saisi est à compter dans la totalité aussi souvent que les points, envisagés comme des éléments différents, fournissent de permutations; donc 2!, 3!, ... fois; car chaque point du groupe peut être considéré comme choisi le premier, le deuxième, le troisième. ......

Un problème se rapporte-t-il à DEUX points pris arbitrairement dans une droite donnée? Les combinaisons des valeurs des distances de ces points à une extrémité de la droite, forment une variété du deuxième ordre; mais une telle variété correspond aussi aux points d'une aire plane, de manière que la question originaire peut être ramenée à une question concernant UN point dans une figure plane.

De même, un problème relatif à TROIS points à prendre arbitrairement dans une droite peut être ramené à un autre qui se rapporte à UN point dans l'espace.

Le cas d'un nombre à choisir arbitrairement entre des limites données est identique à la prise arbitraire d'un point dans une droite, dont la longueur correspond à l'intervalle des limites auxquelles le nombre est lié.

1. Points dans des lignes.

7. **Problème I.** — *Dans la droite* $AB = a$ *un point est pris arbitrairement; quelle est la probabilité pour que sa distance de* A *soit renfermée entre les limites* x *et* $x + dx$, *ou comme on dit brièvement, pour qu'elle soit égale à* x?

Solution. — La probabilité demandée est $\frac{dx}{a}$.

8. **Problème II.** — *Combien grande est la probabilité pour que le point pris arbitrairement dans* AB = a *soit plus près de* A *que de* B?

Solution. — La probabilité demandée est $\frac{1}{2}$, parce qu'il y a autant de cas favorables que de cas défavorables.

9. **Problème III.** — *Avec quelle probabilité deux points pris à volonté dans* AB = a, *se trouveront-ils au dedans de l'éloignement* b *de* A?

Solution. — La probabilité pour qu'un point se trouve au dedans de l'éloignement b de A est $\frac{b}{a}$; la probabilité pour que deux points remplissent cette condition est $p = \frac{b^2}{a^2}$.

10. **Problème IV.** — *Trouver la probabilité pour que de deux points pris arbitrairement dans* AB = a, *le premier soit plus éloigné de* A *que le second.*

Solution. — La probabilité pour que le premier point tombe dans l'éloignement x de A est $\frac{dx}{a}$; la probabilité pour que le second se trouve plus près de A, donc au dedans de l'éloignement x de A, est $\frac{x}{a}$; par conséquent la probabilité composée et totale est

$$p = \int_0^a \frac{x dx}{a^2} = \frac{1}{2};$$

une simple réflexion sanctionne ce résultat.

11. **Problème V.** — *Dans la droite* AB = a *deux points sont pris arbitrairement; combien grande est la probabilité pour que leur éloignement réciproque dépasse une quantité donnée* b?

Première solution. — La probabilité pour que le premier point se trouve à l'éloignement x, le second à l'éloignement y de A, est $\frac{dx\,dy}{a^2}$; on suppose

1) $$y > x,$$

ainsi survient un cas favorable lorsqu'on a

2) $$y - x > b,$$

3) $$y < a.$$

La probabilité cherchée est donc l'intégrale, étendue à la variété limitée par les inégalités 1) ... 3), de l'expression ci-dessus mentionnée; l'intégrale cependant doit être doublée pour recueillir aussi les cas

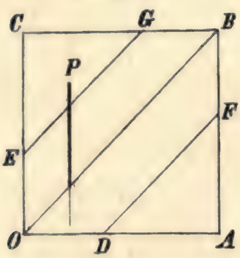
$$y < x,$$

donc

$$p = \frac{2}{a^2}\int_0^a\int_{x+b}^a dx\,dy = \left(\frac{a-b}{a}\right)^2.$$

Deuxième solution. — On peut envisager les éloignements x, y des deux points de A comme les coordonnées d'UN point P qui a été pris arbitrairement dans le carré $OABC$ (fig. 1) de côté a; la différence arithmétique de ces coordonnées donne l'éloignement actuel des deux points premièrement désignés. Construit-on $OD = OE = b$, DF et EG parallèles à OB? Un cas favorable survient aussi souvent que le point P tombe dans un des triangles DAF, CEG. En conséquence, la probabilité demandée est

Fig. 1.



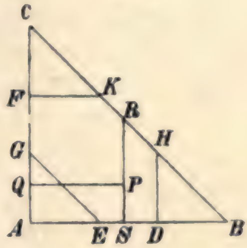
$$p = \frac{DAF + CEG}{OABC} = \left(\frac{a-b}{a}\right)^2.$$

12. **Problème VI**. — *Une droite, dont la longueur est* a, *est partagée en trois parties par deux points choisis à volonté; trouver la probabilité pour qu'aucune partie ne soit plus grande que* b.

Solution. — On prend arbitrairement dans le triangle rectangle isocèle ABC (fig. 2), où $AB = AC = a$, le point P; On mène par lui les lignes PQ, RS respectivement parallèlement et rectangulairement à AB. PQ, PR, PS peuvent valoir comme les sections mentionnées de la droite a. Ensuite deux cas sont à différencier.

1. $b > \frac{1}{2} a$ (Fig. 2). On construit $AD = BE = AF = CG = b$, DH rectangulaire à AB, FK rectangulaire à AC et on joint E à G. Un cas favorable a lieu aussi souvent que le point P tombe dans l'hexagone $EDHKFG$. La probabilité demandée est donc dans ce cas

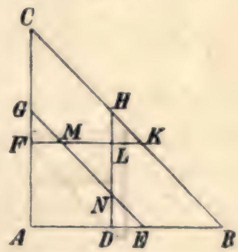
Fig. 2.



$$1)\quad p = \frac{ABC - 3.AEG}{ABC} = 1 - 3\left(\frac{a-b}{a}\right)^2.$$

2. $b < \frac{1}{2} a$ (Fig. 3). Les mêmes constructions que tantôt conduisent à un triangle LMN qui contient les situations favorables de P. Par conséquent, pour ce cas,

Fig. 3



$$2)\quad p = \frac{LMN}{ABC} = \left(\frac{3b-a}{a}\right)^2.$$

13. **Problème VII.** — *Un bâton de longueur* a *est brisé en trois morceaux. Quelle est la probabilité pour qu'avec les morceaux un triangle puisse être formé?*

Première solution. Les longueurs x, y, z des trois morceaux sont subordonnés aux conditions

$$1)\qquad x + y + z = a,$$

$$2)\qquad \left\{\begin{array}{l} y + z \geqq x, \\ z + x \geqq y, \\ x + y \geqq z; \end{array}\right.$$

desquelles, par élimination, résultent les nouvelles conditions

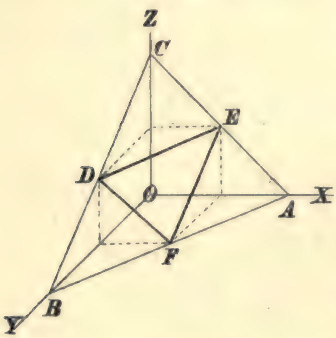
$$3)\qquad x \leqq \frac{a}{2},\quad y \leqq \frac{a}{2},\quad z \leqq \frac{a}{2}.$$

La question présente coïncide donc avec la précédente lorsqu'est posé $b = \frac{a}{2}$; avec cette substitution aussi bien l'équation 1) que l'équation 2) du n° 12 fournissent

$$p = \frac{1}{4}.$$

Deuxième solution. — Soient considérés x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace; ainsi l'équation 1) représente le triangle plan ABC (Fig. 4), dont les angles se trouvent à la distance a de O, pendant qu'aux relations 3), pour le signe inférieur, correspondent des plans qui sont parallèles aux plans coordonnés et sont distants de ceux-ci de $\frac{a}{2}$. Ces trois plans parallèles aux plans coordonnées découpent dans le triangle ABC le triangle DEF, qui visiblement en surface est quatre fois plus petit que ABC.

Fig. 4.



Les coordonnées de tous les points du triangle ABC donnent tous les cas possibles et les coordonnées des points du triangle DEF tous les cas favorables : la probabilité demandée est donc $p = \frac{DEF}{ABC} = \frac{1}{4}$. [1]

14. **Problème VIII.** — *Avec quelle probabilité trois longueurs quelconques, prises cependant sous une limite commune, peuvent-elles former un triangle?*

Première solution. — Soit a la limite commune des trois longueurs. On se la représente divisée en n parties égales; on désigne la grandeur d'une partie par Δa et on suppose

---

(1) Pour cette question posée par E. Lemoine, comparer à la dissertation de L. Lalanne dans le *Journal de Liouville*, 1879, p. 107 et pag. suiv., puis à la solution de E. Lemoine même, dans le *Bull. de la Soc. Mathém. de France*, t. I, p. 39. — Comparer aussi au problème du n° 120.

que les trois longueurs x, y, z prises sont des multiples de Δa; puis on a les conditions

$$1)\qquad \begin{cases} x = \xi \,.\, \Delta a \leqq a, \\ y = \eta \,.\, \Delta a \leqq a, \\ z = \zeta \,.\, \Delta a \leqq a, \end{cases}$$

ou, à raison de $a = n \,.\, \Delta a$,

$$2)\qquad \xi \leqq n, \quad \eta \leqq n, \quad \zeta \leqq n.$$

La question peut alors être exprimée sous la forme suivante :

Trois nombres entiers ξ, η, ζ, *tous trois plus petits que* n, *sont pris arbitrairement; combien grande est la probabilité pour qu'ils puissent représenter des nombres de mesures des côtés d'un triangle?*

α) Si les répétitions sont admises, le nombre des groupes possibles des nombres est $\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}$; la probabilité demandée, lorsque par u_n le nombre des groupes favorables est désigné, est

$$3)\qquad p_n = \frac{6\,u_n}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

Pour découvrir u_n, on étend la limite jusqu'à $n + 1$; les combinaisons favorables à introduire nouvellement, au nombre de Δu_n, renfermeront toutes le nouveau nombre $n + 1$. Si l'on place celui-ci à la tête, ainsi l'ambe encore restant peut se commencer par $n + 1$ et se terminer par tous les nombres de $n + 1$ jusqu'à 1, ou se commencer par n et se terminer par tous les nombres de n jusqu'à 2; ... enfin, lors de n paire, se commencer et se terminer par $\frac{n}{2}$; lors de n impaire, se commencer par $\frac{n+1}{2}$ et se terminer par $\frac{n+1}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$. En conséquence, pour une n PAIRE, on a

$$4\qquad \Delta u_n = (n+1) + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{1}{4}\,(n^2 + 4n + 4),$$

pour une n IMPAIRE

$$5)\qquad \Delta u_n = (n+1) + (n-1) + \ldots + 2 = \frac{1}{4}\,(n^2 + 4n + 3).$$

Les valeurs de u_n forment donc, avec indice pair, une série arithmétique du troisième ordre avec

$$u_0 = 1, \quad \Delta' u_0 = 3, \quad \Delta'^2 u_0 = 7, \quad \Delta'^3 u_0 = 4, \text{(1)}$$

de sorte que, pour une n paire, on obtient

$$6) \qquad u_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n}{48};$$

de même les valeurs de u_n avec indice impair donnent une progression arithmétique du troisième ordre avec

$$u_1 = 1, \quad \Delta' u_1 = 6, \quad \Delta'^2 u_1 = 9, \quad \Delta'^3 u_1 = 4, \text{(2)}$$

par conséquent pour une n impaire il vient :

$$7) \qquad u_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n + 6}{48}.$$

Par insertion de ces expressions dans l'équation 3), se livre pour une n PAIRE,

$$8) \qquad p_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n}{8n(n+1)(n+2)} = \frac{2n+5}{4(n+1)},$$

pour une n IMPAIRE,

$$9) \qquad p_n = \frac{4n^5 + 18n^2 + 20n + 6}{8n(n+1)(n+2)} = \frac{(2n+1)(n+3)}{4n(n+2)}.$$

Les expressions 6) et 7) se laissent produire sous la forme indivise

$$u_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n + 3 - 3(-1)^n}{48};$$

puis s'écrit, POUR UNE n QUELCONQUE,

$$p_n = \frac{4n^3 + 18n^2 + 20n + 3 - 3(-1)^n}{8n(n+1)(n+2)}.$$

β) Les répétitions ne sont-elles pas admises? $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ est la quantité des groupes possibles des nombres; si le nombre des groupes favorables est désigné par v_n on a

$$10) \qquad p_n = \frac{6v_n}{n(n-1)(n-2)}.$$

---

(1) $\Delta' u_0 = \Delta u_0 + \Delta u_1 = 1 + 2 = 3, \quad \Delta' u_2 = \Delta u_2 + \Delta u_3 = 4 + 6 = 10,$
$\Delta' u_4 = \Delta u_4 + \Delta u_5 =$ etc..

(2) $\Delta' u_1 = \Delta u_1 + \Delta u_2 = 2 + 4 = 6, \quad \Delta' u_3 = \Delta u_3 + \Delta u_4 = 6 + 9 = 15,$
$\Delta' u_5 = \Delta u_5 + \Delta u_6 =$ etc..

Élargit-on, en vue de la détermination de v_n, la limite jusqu'à $n+1$? Tous les groupes favorables à introduire nouvellement contiendront le nombre $n+1$, qui placé à la tête peut être combiné avec les ambes suivants :

$$\begin{array}{rl} n \text{ et } & n-1,\ n-2, \ldots 2, \\ n-1 \ \text{,,} & n-2,\ n-3, \ldots 3, \\ n-2 \ \text{,,} & n-3,\ n-4, \ldots 4, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

donc avec n PAIRE :

$$11) \quad \Delta v_n = (n-2) + (n+4) + \ldots + 2 = \frac{1}{4}(n^2 - 2n),$$

avec n IMPAIRE :

$$12) \quad \Delta v_n = (n-2) + (n-4) + \ldots + 1 = \frac{1}{4}(n^2 - 2n + 1).$$

Les valeurs de v_n, avec indices pairs, forment conséquemment une progression arithmétique du troisième ordre avec

$$v_0 = 0, \quad \Delta' v_0 = 0, \quad \Delta'^2 v_0 = 1, \quad \Delta'^3 v_0 = 4, \text{(1)}$$

d'où

$$13) \qquad v_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n}{48};$$

de même les v_n, avec indices impairs, se tiennent en une progression arithmétique du troisième ordre avec

$$v_1 = 0, \quad \Delta' v_1 = 0, \quad \Delta'^2 v_1 = 3, \quad \Delta'^3 v_1 = 4, \text{(2)}$$

d'où

$$14) \qquad v_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n - 6}{48}.$$

Avec ces expressions l'équation 10) donne pour une n PAIRE

$$15) \qquad p_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n}{8n(n-1)(n-2)} = \frac{2n-5}{4(n-1)}.$$

pour une n IMPAIRE

$$16) \quad p_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n - 6}{8n(n-1)(n-2)} = \frac{(2n-1)(n-3)}{4n(n-2)}.$$

---

(1) $\Delta' v_0 = \Delta v_0 + \Delta v_1 = 0 + 0 = 0, \quad \Delta' v_2 = \Delta v_2 + \Delta v_3 = 0 + 1 = 1,$
$\Delta' v_4 = \Delta v_4 + \Delta v_5 =$ etc..

(2) $\Delta' v_1 = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 0 + 0 = 0, \quad \Delta' v_3 = \Delta v_3 + \Delta v_4 = 1 + 2 = 3,$
$\Delta' v_5 = \Delta v_5 + \Delta v_6 =$ etc..

Par réunion se livrent POUR UNE n QUELCONQUE

$$v_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n - 3 + 3(-1)_n}{48}$$

$$\text{et } p_n = \frac{4n^3 - 18n^2 + 20n - 3 + 3(-1)_n}{8n(n-1)(n-2)}$$

Le passage au problème originaire a lieu maintenant par ce que l'on fait devenir les parties Aa infiniment petites, donc leur nombre n infiniment grand. Par chacune des quatre formules 8), 9), 15), 16) se donne, par ce moyen, la même valeur pour la probabilité demandée, savoir : $p = \frac{1}{2}$.

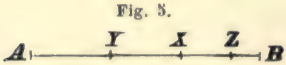
REMARQUE. — Dans le cas α), aussi bien que dans le cas β), sous la supposition d'une n paire, les trois valeurs se suivant l'une l'autre

$$p_n, \quad p_{n+1}, \quad p_{n+2}$$

forment une progression arithmétique, dans le premier cas avec la raison $\frac{3}{4(n+1)(n+3)}$, dans le second avec la raison $\frac{3}{4(n+1)(n-1)}$.

Deuxième solution. — L'étendue AB (fig. 5) représente la limite commune donnée; AX, AY, AZ sont les trois longueurs quelconques, se formant par prise arbitraire des points X, Y, Z dans AB. Comme il est clair tout d'abord

Fig. 5.



que la probabilité en question ne dépendra pas de la grandeur AB, il est permis d'envisager la plus grande des trois longueurs AZ comme la limite. Pose-t-on ensuite $AX = x$, $AY = y$, $AZ = a$? On a l'unique condition

$$x + y > a.$$

Mais à chaque couple des valeurs x, y, qui remplit cette condition, se rapporte une autre couple $a - x$, $a - y$ — qu'on imagine mesurée cependant de Z au lieu de A — qui ne la remplit pas; dès lors on a

$$(a-x)+(a-y)<a;$$

c'est-à-dire à chaque cas favorable se rapporte un cas défavorable, ou la probabilité demandée est

$$p=\frac{1}{2}.$$

15. — **Problème IX.** — *Trouver la probabilité pour qu'avec trois longueurs choisies arbitrairement dans les limites données* a *et* b, *un triangle puisse être formé.*

Solution. — Désignons par x la plus petite, par y la moyenne, par z la plus grande des trois longueurs; ainsi, les grandeurs dénommées ont à satisfaire aux conditions suivantes :

1) $x \geqq a;$
2) $z \leqq b;$
3) $x \leqq y;$
4) $y \leqq z;$
5) $z \leqq x+y.$

On conçoit x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace. Les cinq plans représentés par les relations 1) à 5), lorsque dans celles-ci le signe inférieur est pris, limitent un pentaèdre ou un tétraèdre, et tous les points de ce solide possèdent des coordonnées qui satisfont aux conditions dites. La contenance sextuplée du polyèdre — en considération des six permutations des lettres x, y, z — donne donc le nombre des cas favorables pendant que $(b-a)^3$ est le nombre des cas possibles.

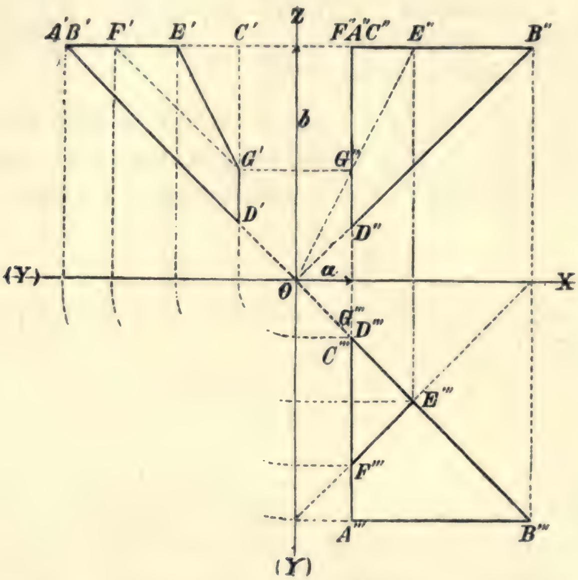
Les équations 1) à 4) conduisent à un tétraèdre $ABCD$ qui dans la fig. 6 (pag. 20) est représenté par ses projections $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A'''B'''C'''D'''$ sur les trois plans coordonnés. Relativement au cinquième plan 5) dont les traces dans les plans YZ, ZX partagent en deux les angles YOZ, ZOX, deux cas peuvent arriver.

1. Est $b>2a$, comme dans la figure? Alors le plan 5)

découpe du tétraèdre $ABCD$ un tétraèdre plus petit $EFCG$ et produit ainsi un pentaèdre.

2. Est $b < 2a$? Le plan 5) passe en dehors du tétraèdre $ABCD$, sans le couper, et tous les points de celui-ci satisfont aux conditions 1) à 5).

Fig. 6.



Les dimensions requises pour l'évaluation de la capacité sont à prendre aisément dans la représentation.

Le tétraèdre $ABCD$ a pour base le triangle $ABC = \frac{1}{2}(b-a)^2$ et pour hauteur $CD = b - a$; son volume est donc $\frac{1}{6}\,(b-a)^3$.

Le tétraèdre $EFCG$ a pour surface de base le triangle $EFC = \frac{1}{4}\,(b-2a)^2$ et pour hauteur $CG = b - 2a$; son volume est donc $\frac{1}{12}\,(b-2a)^3$.

La probabilité demandée est donc

$$1)\quad \begin{cases} \text{pour } b > 2a, \\ \qquad p = \dfrac{1}{2}\left[2 - \left(\dfrac{b-2a}{b-a}\right)^3\right], \\ \text{pour } b < 2a, \\ \qquad p = \left(\dfrac{b-a}{b-a}\right)^3 = 1; \end{cases}$$

le dernier résultat est confirmé par la simple réflexion ([1]).

REMARQUE. — Le problème précédent VIII se donne comme cas particulier du présent problème, lorsqu'on fait disparaître la limite a. En effet, la formule 1), pour $a=0$, de nouveau donne $p=\frac{1}{2}$.

16. **Problème X.** — *Une droite donnée est divisée arbitrairement en trois parties; trouver la probabilité pour qu'avec les sections un triangle acutangle puisse être formé.*

Solution. — En d'autres mots, le problème s'énonce :

Dans une droite donnée deux points sont pris à volonté; combien grande est la probabilité pour que le carré de chacune des trois sections soit plus petit que la somme des carrés des deux autres?

Soit P la probabilité demandée, Q la probabilité pour que le carré de la section MOYENNE soit plus GRANDE que la somme des carrés des deux autres, ainsi

$$1)\qquad P = 1 - 3Q.$$

Soient ensuite X, Y les deux points choisis à volonté dans la droite $AB=a$; x, y leurs distances de A.

Deux cas peuvent arriver relativement à la situation réciproque de X et de Y: X est plus éloigné de A que Y; y, $x-y$, $a-x$ sont les longueurs des trois sections; ou X gît plus près de A que Y; les sections sont x, $y-x$, $a-y$.

([1]) Comparer à la dissertation de L. LALANNE : " De l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités " dans le journal de Liouville 1879, page 107 et pages suivantes.

Si maintenant q désigne la probabilité pour que dans le premier cas des cas indiqués, s'excluant mutuellement, la condition

2) $$(x - y)^2 > y^2 + (a - x)^3$$

soit remplie, cette probabilité est valable aussi pour la condition analogue dans le second cas; ou $Q = 2q$; par conséquent

3) $$P = 1 - 6q.$$

Mais de la condition marquée plus haut, résulte

$$y < a - \frac{a2}{2x};$$

y doit donc être renfermé entre les limites 0 et $a - \frac{a^2}{2x}$ ou à l'intérieur d'un intervalle de l'étendue $a - \frac{a^2}{2x}$, et comme toutes les valeurs de y sont également possibles entre 0 et a, ainsi

$$1 - \frac{a}{2x}$$

est la probabilité pour que la condition 1) soit remplie.

Multiplie-t-on cette probabilité par $\frac{dx}{a}$, la probabilité pour que X possède l'éloignement x de A? On obtient la probabilité avec laquelle la relation 1) est remplie lors de la valeur particulière x.

Pour obtenir q, on aurait donc à intégrer l'expression

$$\left(1 - \frac{a}{2x}\right) \frac{dx}{a}$$

pour le domaine complet des valeurs de x, cela est de 0 à a. Maintenant, il est à prendre en considération que l'expression $1 - \frac{a}{2x}$ qui représente une probabilité, devient négative pour des valeurs de x entre 0 et $\frac{a}{2}$; cette valeur négative est à estimer cependant égale à o, parce que, lorsqu'on a $x < \frac{a}{2}$, la somme des deux premières sections

$(y; x-y)$ est plus petite que la troisième $(a-x)$, par conséquent généralement aucun triangle n'est possible.

En se basant sur cette remarque on a

$$4)\qquad q=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left(1-\frac{a}{2x}\right)\frac{dx}{a}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,l.2$$

et, de par l'équation 3), la probabilité cherchée

$$5)\qquad P=3l.2-2.$$

17. Remarque. — Le cas observé dans la solution du problème ci-dessus, la fonction qui exprime une probabilité dépendante d'une ou de plusieurs variables délaissant le domaine des valeurs des fractions positives propres, se répète fréquemment dans le traitement analytique de questions analogues. Le « devenir négatif » de la fonction montre que l'événement en question avec la valeur attribuée aux variables NE PEUT PAS SE RÉALISER, tandis qu'une valeur de la fonction, franchissant l'unité positive indique que l'événement DOIT SE RÉALISER nécessairement.

Pour de tels cas, Hugh M'Coll, dans le XV^e tome de l'„ Educational Times „ page 20 et pages suivantes, a donné un procédé dont les traits principaux doivent être développés ici brièvement, pour pouvoir l'appliquer plus tard à quelques questions.

1. La valeur limite de laquelle la somme $\sum_{a}^{b}\varphi(x).\Delta x$ s'approche, avec Δx diminuant infiniment, par conséquent avec le nombre de termes augmentant infiniment, SUPPOSÉ que pour des valeurs négatives de $\varphi(x)$, 0 est posé, pour des valeurs de $\varphi(x)$ positives, dépassant l'unité, l'unité est posée, doit être désignée par le symbole $\int_{a}^{b}\varphi(x).\,px$.

De cette définition résultent immédiatement les formules suivantes.

Entre les limites a et b, a-t-on constamment $\varphi(x)<0$? Dans ce cas,

$$\int_a^b \varphi(x) \,.\, px = \int_a^b 0 \,.\, dx = 0.$$

La fonction $\varphi(x)$ reste-t-elle dans le domaine désigné des valeurs une fraction propre? On a

$$\int_a^b \varphi(x) \,.\, px = \int_a^b \varphi(x) \,.\, dx.$$

Le signe px peut donc être remplacé par dx.

La fonction $\varphi(x)$, entre les limites d'intégration, est-elle constamment positive et plus grande que 1? On a

$$\int_a^b \varphi(x) \,.\, px = \int_a^b 1 \,.\, dx = b - a.$$

Si plusieurs des cas cités se présentent ensemble l'intervalle d'intégration est à décomposer correspondamment.

2. Cela dit, $\varphi(x)$ indique pour chaque valeur de x entre a et b la probabilité d'un événement dépendant de x; ensuite, $\frac{dx}{b-a}$ est la probabilité d'une valeur déterminée de x, sise entre a et b; $\varphi(x) \,.\, \frac{dx}{b-a}$ marque la probabilité pour qu'avec cette valeur particulière de x l'événement attendu se réalise et

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x) \,.\, px$$

la probabilité de cet événement lors d'une valeur de x arbitrairement choisie à l'intérieur des limites désignées.

3. La fonction $\varphi(x)$ change-t-elle sa forme dans le domaine des valeurs de x, et la fonction $\varphi_1(x)$ est-elle valable pour des valeurs de x entre a_1 et a_2; $\varphi_2(x)$, pour des valeurs de x entre a_2 et a_3; ... $\varphi_{n-1}(x)$ enfin, pour des valeurs de x entre a_{n-1} et a_n? La probabilité de l'événement attendu pour une valeur de x prise à volonté entre a_1 et a_n est égale à

$$\frac{1}{a_n - a_1}\left\{\int_{a_1}^{a_3} \varphi_1(x) \,.\, px + \int_{a_2}^{a_2} \varphi_2(x) \,.\, px + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} \varphi_{n-1}(x) \,.\, px\right\}.$$

4. La probabilité à déterminer dépend-elle de plusieurs grandeurs indépendamment variables à l'intérieur de limites données? On procède comme si tout d'abord toutes les variables, moins une, avaient des valeurs données, et on cherche la probabilité pour une valeur prise arbitrairement de cette seule variable. Avec cette probabilité, on procède de la même manière relativement à une seconde variable et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les variables soient éliminées et la probabilité est exprimée en nombres donnés.

Dans l'application de ces règles au problème X, le calcul pour q se serait présenté ainsi :

$$q = \frac{1}{a}\int_0^a \left(1 - \frac{a}{2x}\right) . px = \frac{1}{a}\left\{\int_0^{\frac{a}{2}} 0 . dx + \int_{\frac{a}{2}}^a \left(1 - \frac{a}{2x}\right) dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} l . 2.$$

18. **Problème XI**. — *Une droite de longueur donnée* a *est partagée arbitrairement en quatre parties. Trouver la probabilité pour que la somme des carrés de quelques trois parties soit plus petite que le carré de la quatrième partie.*

Solution. — Les quatre parties peuvent être désignées par $x, y, z, a - x - y - z$. Chacune de celles-ci peut se trouver entre 0 et a, par conséquent la probabilité d'une combinaison déterminée des valeurs est :

$$1) \qquad 6\frac{dx}{a} \cdot \frac{dy}{a} \cdot \frac{dz}{a} = \frac{6}{a^3} dx\, dy\, dz,$$

en considération du nombre des permutations des lettres x, y, z. Les combinaisons favorables ont à correspondre à la condition

$$2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leqq (a - x - y - z)^2$$

et encore à trois conditions semblablement formées; chacune est remplie avec la même probabilité. Il suffit donc de découvrir et de quadrupler la probabilité de l'une de ces conditions, par exemple de celle notée ci-dessus.

De 2) résultent les relations plus explicites :

$$3)\qquad \begin{cases} z \leqq \dfrac{(a-x-y)^2 - x^2 - y^2}{2(a-x-y)} = z', \\ y \leqq \dfrac{(a-x)^2 - x^2}{2(a-x)} = y', \\ x \leqq \dfrac{1}{2}\, a. \end{cases}$$

La première s'obtient par la résolution de 2) suivant z, la seconde par l'exigence que la limite z' de z doit être une quantité positive, de même la troisième par l'exigence que la limite y' de y doit être positive. La probabilité totale est donc obtenue en multipliant par 4 l'intégrale de l'expression 1) étendue au domaine des valeurs, limité par les relations 3), c'est-à-dire est

$$p = \frac{24}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}a} \int_0^{y'} \int_0^{z'} dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{24}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_0^{y'} \frac{(a-x-y)^2 - x^2 - y^2}{2(a-x-y)}\, dy.$$

Décompose-t-on la fonction artificiellement divisée en les parties constituantes

$$(a-x) + \frac{1}{2}\,\frac{(a-x)^2 + x^2}{y-a+x}?$$

Il vient par suite :

$$p = \frac{12}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}a} \left[(a-x)^2 - x^2 + \{(a-x)^2 + x^2\}\, l\,.\, \frac{(a-x)^2 + x^2}{2(a-x)^2} \right] dx$$

$$= 3 + \frac{12}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}a} \{ (a-x)^2 + x^2 \}\, l\,.\, \frac{(a-x)^2 + x^2}{2(a-x)^2}\, dx,$$

et, par intégration par parties, en posant

$$\{(a-x)^2+x^2\}\,dx = du, \quad l\,.\,\frac{(a-x)^2+x^2}{2\,(a-x)^2} = r,$$

s'obtient enfin facilement

4) $$p = 6 + \pi - 12l\,.\,2.$$

19. **Problème XII.** — *De* n *longueurs également longues, on découpe arbitrairement de chacune un fragment; trouver la probabilité pour que la* r$^{\text{ième}}$ *puissance du nombre de mesure du plus grand fragment soit plus grande que la somme des* r$^{\text{ièmes}}$ *puissances des nombres de mesure des autres fragments.*

Solution. — La longueur commune des longueurs données prise comme unité, soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les longueurs des fragments découpés. La probabilité de quelqu'une combinaison des valeurs de celles-ci est $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

Supposé que le premier fragment soit le plus grand, on doit avoir

1) $$x_2^r + x_3^r + \ldots + x^r < x_1^r$$

et comme chaque fragment peut être le plus grand avec la même probabilité, la probabilité résultant de la supposition susdite n'a besoin d'être prise que n fois; la probabilité totale de l'événement en question est conformément à cela

2) $$p = n\int_0^1 dx_1 \int\int\ldots\int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n,$$

l'intégrale multiple étendue au domaine des valeurs des variables, caractérisé par 1). Par les substitutions

$$x_2^r = x_1^r\,\xi_2, \quad x_3^r = x_1^r\,\xi_3, \ldots x_n^r = x_1^r\,\xi_n,$$

il vient

$$p = \frac{u}{r^{n-1}}\int_0^1 x_1^{n-1}dx_1 \int\int\ldots\int (\xi_2\,\xi_3 \ldots \xi_n)^{\left(\frac{1}{r}-1\right)} d\xi_2\, d\xi_3 \ldots d\xi_n,$$

l'intégrale multiple étendue présentement à toutes les combinaisons positives des valeurs des nouvelles variables $\xi_2, \ldots \xi_n$ qui se concilient avec la relation

3) $$\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n < 1.$$

La valeur de cette intégrale est [1]

$$\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{r}+1\right)},$$

et comme de plus

$$\int_0^1 x_1^{n-1}\,dx_1 = \frac{1}{n},$$

on obtient finalement

$$4) \qquad p = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{r}+1\right)}.$$

Pour $r = 1$, on reçoit par la formule générale 4)

$$5) \qquad p_1 = \frac{\{\Gamma(1)\}^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)!}$$

---

[1] Après introduction des limites s'énonce l'intégrale :

$$1) \qquad J = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \int_0^{1-\xi_2-\xi_3} \cdots \int_0^{1-\xi_2-\xi_3-\ldots\xi_{n-1}} (\xi_2\,\xi_3\ldots\xi_n)^{\frac{1}{r}-1}\,d\xi_2\,d\xi_3\ldots d\xi_n.$$

Partant de l'intégrale triple générale

$$J' = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^{l-1}\,y^{m-1}\,z^{n-1}\,dx\,dy\,dz$$

se livre, par exécution successive des intégrations avec l'emploi de la formule suivante à démontrer facilement :

$$\int_0^a x^{l-1}(a-x)^{m-1}\,dx = a^{l+m-1}\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}$$

en premier lieu

$$2) \qquad \left\{\begin{aligned} J' &= \frac{1}{n}\int_0^1 x^{l-1}\,dx \int_0^{1-x} y^{m-1}(1-x-y)^n\,dy \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} \int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m+n}\,dx \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} \cdot \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(l+m+n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}, \end{aligned}\right.$$

et lorsque particulièrement 3 est le nombre des longueurs, il vient

$$p_1^{(3)} = \frac{1}{2};$$

manifestement cela est la probabilité pour qu'avec trois longueurs prises sous une limite commune il ne puisse être formé un triangle (¹).

Pour $r = 2$, on obtient par l'équation 5)

$$p_2 = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\pi\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

et pour trois longueurs en particulier

$$p_2^{(3)} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\pi;$$

c'est en même temps la probabilité pour qu'avec trois longueurs prises à volonté sous une limite commune un triangle OBTUSANGLE puisse être formé, c'est pourquoi la probabilité d'un triangle ACUTANGLE sous les mêmes conditions égale (²)

$$q_2^{(3)} = 1 - p_2^{(3)} = 1 - \frac{1}{4}\pi.$$

---

et il est clair que cette marche peut être étendue à des variables nombreuses à volonté, par laquelle on obtiendrait

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \cdots \int_0^{1-x-y-\dots-u} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \dots v^{s-1} dx dy dz \dots dv = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\dots\Gamma(s)}{\Gamma(l+m+n+\dots+s+1)}.$$

L'intégrale J, équation 1), de la résolution de laquelle il s'agit, se livre comme cas particulier de la présente intégrale, et cela en posant

$$l = m = n = \dots = \frac{1}{r};$$

par conséquent, on a effectivement

$$J = \frac{\left\{ \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{r} + 1\right)}.$$

(¹) Comparer au problème VIII, n° 14.

(²) Comparer au problème X, n° 16.

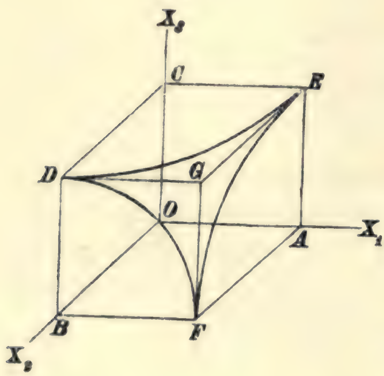
Les deux derniers résultats peuvent être vérifiés facilement par la voie géométrique. A la totalité des combinaisons des valeurs positives des variables x_1, x_2, x_3, laquelle est caractérisée par

$$x_1 \leqq 1, \quad x_2 \leqq 1, \quad x_3 \leqq 1,$$

correspond géométriquement un cube OG (fig. 7), de côté 1; les totalités des combinaisons positives des valeurs des mêmes variables qui satisfont aux conditions

$$x_1^2 \geqq x_2^2 + x_3^2, \quad x_2^2 \geqq x_3^2 + x_1^2, \quad x_3^2 \geqq x_1^2 + x_2^2$$

Fig. 7.



sont représentées géométriquement par trois cônes, qui, en O, ont leur sommet commun et dont les surfaces de base sont les quarts de cercle AEF, BFD, CDE. De là résulte, pour la probabilité pour qu'une des conditions susdites soit remplie, ou pour qu'avec les longueurs x_1, x_2, x_3 un triangle obtusangle se laisse former, l'expression

$$\frac{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4},$$

comme plus haut.

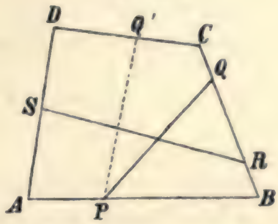
20. **Problème XIII.** — *Dans les côtés d'un quadrilatère donné, sont pris à volonté quatre points. Quelle est la probabilité pour que leurs lignes de jonction se coupent dans l'intérieur du quadrilatère?*

Solution. — Soit $ABCD$ (fig. 8) le quadrilatère donné; $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

1. On se représente premièrement deux des points P, Q pris dans des côtés voisins et on pose $BP = x$, $BQ = y$. Un troisième point R est-il choisi maintenant à volonté dans BQ?

Ainsi, le quatrième point S, lorsque PQ et RS doivent se couper à l'intérieur du quadrilatère, peut être pris arbitrairement dans le tracé des lignes $PADC$ dont la longueur est $c+d+a-x$. Le nombre de telles lignes RS est mesuré par $(c+d+a-x)\,y$. — Le troisième point R est-il pris dans PB? Un cas favorable a lieu lorsque S tombe sur le tracé des lignes $ADCQ$ dont la longueur est $c+d+b-y$. La quantité de telles droites RS est $(c+d+b-y)\,x$.

Fig. 8.



Comme enfin la quantité des lignes PQ qui, sur BA, sur BC, forment les sections x, y, est exprimée par $dx \,.\, dy$, le nombre des cas favorables, qui résulte de cette adoption, est

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^a\!\!\int_0^b \{ (c+d+a-x)\,y + (c+d+b-y)\,x \}\,dx\,dy \\ &\qquad = \frac{1}{2}\,ab\,\{ ab + (a+b)(c+d) \}. \end{aligned} \right.$$

Des expressions similaires pour les trois couples restantes des côtés contigus, s'obtiennent par permutation cyclique des lettres, savoir :

$$2)\qquad \frac{1}{2}\,bc\,\{ bc + (b+c)(d+a) \},$$

$$3)\qquad \frac{1}{2}\,cd\,\{ cd + (c+d)(a+b) \},$$

$$4)\qquad \frac{1}{2}\,da\,\{ da + (d+a)(b+c) \}.$$

2. Maintenant les deux premiers points P, Q' peuvent tomber sur des côtés se faisant face; soit alors $CQ' = z$. Selon qu'à présent le troisième point R vient à se placer sur BP, BC, CQ', les situations favorables de S sont comptées respectivement par

$$d+c-z, \quad a+c+d-x-z, \quad a+d-x.$$

Le nombre des cas favorables, qui résulte de cette deuxième adoption, est par conséquent

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^a \int_0^c \{(d+c-z)x + (a+c+d-x-z)b + (a+d+x)z\}\,dx\,dz \\ &\qquad = \frac{1}{2}\,ac\,\{ac + 2bd + (a+c)(b+d)\}\,. \end{aligned}\right.$$

Les points P, Q' sont-ils pris dans une autre paire de côtés se faisant face? De là naissent

$$6)\qquad \frac{1}{2}\,bd\,\{bd + 2ca + (b+d)(c+a)\}$$

cas favorables.

Les cas favorables sont épuisés; seulement les expressions 1) à 6) doivent être multipliées par 4, puisque P peut être permuté avec Q et R avec S

Comme maintenant les cas possibles sont comptés par $(a+b+c+d)^4$, la probabilité demandée est

$$p = \frac{2\,(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 - 4abcd}{(a+b+c+d)^4}.$$

Pour un parallélogramme, où $a = c$, $b = d$, il vient

$$p = \frac{(a^2 + 4ab + b^2)^2 - 2a^2b^2}{8\,(a+b)^4}$$

et pour un losange

$$p = \frac{17}{64}.$$

21. **Problème XIV.** — *Dans chaque côté d'un triangle régulier est pris à volonté un point. Trouver la probabilité pour que les trois points déterminent un triangle acutangle.*

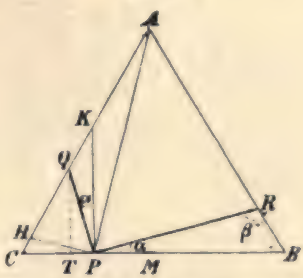
Solution. — Nous demandons premièrement la probabilité pour qu'en un des trois points, par exemple en P, dans BC (fig. 9), un angle obtu prenne naissance; si nous appelons celle-ci q, la probabilité réclamée est

$$1)\qquad p = 1 - 3q.$$

Manifestement il suffit de limiter en premier lieu le point P à la moitié CM du côté BC. Pour le dessein du compte des cas favorables on joint P à A et mène PH rectangulairement à PA, PK perpendiculairement à BC.

Maintenant soit Q un point quelconque dans AC; on le joint à P et l'on mène PR rectangulairement à PQ. On reconnait sans peine qu'en P un angle obtu prend naissance lorsque le troisième point S tombe dans l'étendue BR. Relativement à la situation de Q, trois cas sont à distinguer. Q est dans CH: toute situation de S dans AB est favorable; Q tombe dans l'étendue HK : le nombre des situations favorables de S, comme cela est déjà dit, est mesuré par BR; enfin Q tombe dans la section KA : il n'y a pas de situation favorable de S.

Fig. 9.



Si l'on pose $CP = x$, $CQ = y$, $BC = CA = AB = 1$, on obtient pour la quantité des combinaisons des trois points, favorables à la naissance d'un angle obtu en P, lorsque P reçoit toutes les situations dans CM, l'expression

$$\int_0^{\frac{1}{2}} CH\,.dx + \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{CH}^{CK} BR\,.\,dx\,dy;$$

on obtient, pour les situations de P dans MB, la même quantité de cas favorables, et puisque la quantité des cas possibles comporte $1.1.1 = 1$, on a

$$2)\qquad q = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[CH + \int_{CH}^{CK} BR\,.\,dy\right] dx.$$

Pour le moment, soit l'angle $BPR = \alpha$, l'angle $BRP = \beta$: il s'ensuit dans le triangle BPR

$$3)\qquad BR = (1 - x)\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Du triangle KPQ, où $QK = CK - CQ = 2x - y$ et l'angle $QKP = 30^\circ$, résulte

$$4)\qquad \sin\alpha = \frac{2x - y}{2\,.\,PQ};$$

par comparaison des angles dans les triangles BPR et CPQ, se donne ensuite

$$\beta + \alpha = \angle\, CQP + \angle\, CPQ,$$

ou

$$\beta + \alpha = 30^0 + \alpha + \angle\, CPQ,$$

d'où

$$\beta = 30^0 + \angle\, CPQ$$

et

$$\sin \beta = \frac{1}{2} \cos CPQ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin CPQ;$$

dans cette équation,

$$\sin CPQ = \frac{QT}{PQ} = \frac{y\sqrt{3}}{2\,.\,PQ}, \quad \cos CPQ = \frac{PT}{PQ} = \frac{x - \frac{y}{2}}{PQ} = \frac{2x - y}{2\,.\,PQ};$$

par là

5) $$\sin \beta = \frac{x + y}{2\,.\,PQ}.$$

Si l'on substitue les valeurs de 4) et de 5) dans l'équation 3), on obtient

6) $$BR = \frac{(1 - x)\,(2x - y)}{x + y}.$$

Si R tombe du côté de A, Q vient vers H; par conséquent CH est la valeur de y s'obtenant en posant l'expression de BR égale à l'unité, c'est-à-dire que

7) $$CH = y_1 = 2x + 3 + \frac{6}{2 - x};$$

enfin

8) $$CK = y_2 = 2x.$$

On introduit les valeurs de 6), de 7), de 8) dans l'équation 2); il vient

9) $$\left\{\begin{aligned} q &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ y_1 + \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{3x\,(1 - x)}{x + y} - 1 + x \right) dy \right\} dx \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ y_1 + 3x\,(1 - x)\, l\,.\, \frac{x + y_2}{x + y_1} - (1 - x)\,(y_2 - y_1) \right\} dx \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ 3x\,(1 - x)\, l\,.\, \frac{2 - x}{1 - x} - x \right\} dx \\ &= \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\, l\,.\, \frac{2}{4}; \end{aligned}\right.$$

la première partie de la dernière intégrale est calculée facilement par intégration par parties.

Après cela, la probabilité réclamée suivant l'équation 1), est finalement

$$10) \qquad p = 1 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\, l.\, \frac{27}{64} = 1 - \frac{9}{2}\, l.\left(\frac{27}{64} e\right).$$

22. **Problème XV.** — *Sur le trait d'une ellipse sont pris à volonté trois points. Rechercher la condition sous laquelle avec les rayons de courbure de ces points, avec certitude, un triangle peut être formé.*

Solution. — Les rayons de courbure des trois points sont désignés par ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3; il doit être satisfait à la condition

$$\varrho_1 + \varrho_2 > \varrho_3,$$

ainsi qu'à deux conditions similaires. Si a, b sont les demi-axes de l'ellipse, $\frac{a^2}{b}$ est la plus grande, $\frac{b^2}{a}$ la plus petite valeur de ϱ; par conséquent, les conditions de la question sont certainement remplies quand on a

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} > \frac{a^2}{b},$$

ou

$$\frac{b^3}{a^3} > \frac{1}{2},$$

ou quand on a l'excentricité numérique

$$\varepsilon < \left(1 - 2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

23. **Problème XVI.** — *A une ellipse, représentée par les équations*

$$x = a \cos \theta,\ y = b \sin \theta,$$

sont menées des tangentes en deux points qui répondent à des valeurs arbitraires de θ. Trouver la probabilité pour que le point d'intersection de ces tangentes tombe sur une surface annulaire limitée par deux ellipses données, semblables, semblablement placées concentriquement à la première ellipse.

Solution. — Les équations des trois ellipses peuvent être écrites sous la forme :

$$1)\quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = sec^2\,\alpha, \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = sec^2\,\beta.$$

Si θ_1, θ_2 sont les arguments des deux points pris à volonté sur la première ellipse, les tangentes en ces points ont les équations :

$$y = -\frac{b}{a}\,cotg\,\theta_1 \,.\, x + \frac{b}{sin\,\theta_1},$$
$$y = -\frac{b}{a}\,cotg\,\theta_2 \,.\, x + \frac{b}{sin\,\theta_2}$$

et leur point d'intersection a les coordonnées :

$$x = a\,\frac{cos\,\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{cos\,\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}, \quad y = b\,\frac{sin\,\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{cos\,\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)};$$

il se trouve par conséquent sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = sec^2\,\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2).$$

Un cas favorable se présente aussi souvent que cette ellipse vient à se trouver entre les deux dernières de 1), c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\alpha < \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) < \beta,$$

ou

$$\theta_1 - 2\beta < \theta_2 < \theta_1 - 2\alpha.$$

De cette condition, résulte la probabilité cherchée suivante :

$$p = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1 - 2\beta}^{\theta_1 - 2\alpha} d\theta_1\, d\theta_2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_1} d\theta_1\, d\theta_2} = \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi};$$

numérateur et dénominateur donnent ici seulement la demi-quantité des cas favorables et des cas possibles, parce que l'un et l'autre sont formés sous la supposition $\theta_1 > \theta_2$.

Pour $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$, comme ce doit être, $p = 1$.

24. Les problèmes suivants de ce chapitre traitent des probabilités qui ne sont pas à désigner pour géométriques

dans le sens étroit, mais qui y appartiennent en tant qu'elles dépendent de grandeurs variables d'une manière continue, en particulier de nombres. Comme il a été mentionné déjà au n° 6, à un nombre pris arbitrairement, correspond un point dans une droite donnée, et c'est à ce point de vue que ces questions doivent être classées ici.

25. **Problème XVII**. — *Trouver la probabilité pour que l'équation* $z^2 + pz + q = 0$ *possède des racines réelles, lorsque ses coefficients* p, q *reçoivent toute valeur quelconque entre les limites respectives* $\pm$ P, $\pm$ Q.

Solution. — On considère les valeurs de p, de q comme les coordonnées x, y d'un point d'un plan; aux combinaisons des valeurs des coefficients, correspondent les points d'un rectangle dont les angles ont les coordonnées $\pm P, \pm Q$; la surface de ce rectangle, $4PQ$, est une mesure de la quantité des cas possibles.

Mais les racines réelles sont liées à la relation $q \leqq \frac{1}{4} p^2$ ou

$$y \leqq \frac{1}{4} x^2,$$

laquelle, lorsqu'on prend le signe inférieur, représente une parabole qui sépare le rectangle mentionné des cas possibles en un domaine des cas favorables et en un domaine des cas défavorables.

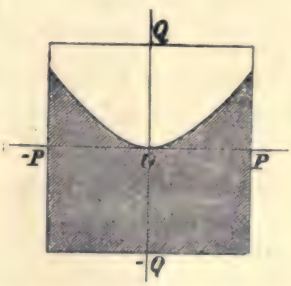
α) Est $Q > \frac{1}{4} P^2$? La parabole a la position indiquée dans la fig. 10 et le domaine (haché) des cas favorables a la superficie

$$2PQ + 2\frac{1}{3}P\frac{1}{4}P^2 = 2PQ + \frac{1}{6}P^3,$$

la probabilité demandée est, pour ce cas,

$$1) \qquad \Pi = \frac{P^2 + 12Q}{24Q}.$$

Fig. 10.



β) Pour le cas $Q < \frac{1}{4} P^2$, la parabole prend la position indiquée dans la figure 11 (p. 38); le domaine des cas favorables a la superficie

$$4PQ - 2 \cdot \frac{2}{3} Q \cdot 2\sqrt{Q} = 4PQ - \frac{8}{3} Q\sqrt{Q},$$

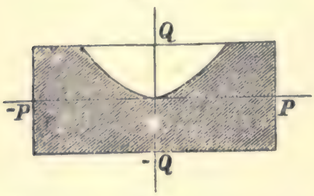
la probabilité correspondante est

$$2) \qquad \Pi = 1 - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{Q}}{P}.$$

Pour le cas limite $Q = \frac{1}{4}P^2$, les formules 1), 2) fournissent la même valeur, $\pi = \frac{2}{3}$.

Le cas spécial $P = Q = 1$ est à traiter par la formule 1) qui donne $\pi = \frac{13}{24}$ (1)

Fig. 11.



26. **Problème XVIII**. — *Une équation quadratique de la forme* $ax^2 + bx + c = 0$ *est écrite au hasard, cependant avec des coefficients réels. Quelle est la probabilité pour que les racines soient réelles?*

Solution. — Pour la solution de cette question, un chemin semblable à celui suivi dans la question précédente pourrait être parcouru, et on serait conduit ainsi à des relations stéréométriques. Dans ce qui suit, une solution analytique, fondée sur le procédé donné par Hugh M'Coll (v. n° 17) est communiquée.

Le " devenir imaginaire " des racines de l'équation offerte est lié à deux et seulement à deux conditions :

1. que a et c soient écrits égaux; la probabilité de cela est $\frac{1}{2}$;

2. que b soit NUMÉRIQUEMENT plus petit que $2\sqrt{ac}$; la probabilité correspondante est appelée q.

Par suite, on a

---

(1) L. Lalanne a donné la voie suivie ici pour la solution de la question présente dans le mémoire, cité déjà en un autre endroit (n° 16), du *Journal de Liouville*, 1879; cependant il n'a pas effectué la distinction rencontrée ici des cas α), β) et a présenté erronément la formule 1) comme valable pour toutes les valeurs de P, de Q.

1) $$Q = \frac{1}{2} \cdot q,$$

la probabilité pour que l'équation écrite possède des racines imaginaires. Il reste donc à découvrir seulement q, dans la supposition de valeurs positives de a, de b, de c.

En premier lieu, les trois nombres peuvent avoir une limite commune, finie, n. La probabilité pour qu'une valeur de b prise arbitrairement, lors de valeurs particulières de a et de c, satisfasse à la seconde condition, est exprimée, dans cette supposition de limite commune, par

2) $$\frac{2\sqrt{ac}}{n} \cdot \frac{da}{n} \cdot \frac{dc}{n};$$

car $\frac{2\sqrt{ac}}{n}$ est la probabilité pour que b possède une valeur entre 0 et $2\sqrt{ac}$, et $\frac{da}{n}$, $\frac{dc}{n}$ sont les probabilités des valeurs particulières de a, de c. La probabilité totale pour que la seconde condition, avec des valeurs quelconques des trois nombres a, b, c, soit satisfaite, égale

3) $$q = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{pa}{n} \int_0^n \frac{2\sqrt{ac}}{n} \cdot pc;$$

les symboles pa, pc sont mis pour da, dc, parce que, premièrement, il faut rechercher l'étendue dans laquelle la fonction se trouvant sous l'intégrale est une fraction propre.

Cette étendue est $$\frac{2\sqrt{ac}}{n} \leqq 1,$$
tant que
$$c \leqq \frac{n^2}{4a}.$$

Cette condition est sûrement remplie lors des valeurs de a pour lesquelles $a \leqq \frac{1}{4}n$, parce qu'alors $\frac{n^2}{4a}$ franchit la limite n de c; au contraire, si l'on a $a \geqq \frac{1}{4}n$, $\frac{n^2}{4a}$ demeure conséquemment sous n, et $2\frac{\sqrt{ac}}{n}$, jusqu'à la valeur $c = \frac{n^2}{4a}$ seulement, est une fraction propre; au delà de cette valeur, une fraction impropre.

Conformément à cela, lorsque d'abord l'intégration est exécutée par rapport à la variable c, pour $a \leqq \frac{1}{4} n$, on obtient

$$\frac{1}{n} \int_0^n \frac{2\sqrt{ac}}{n} pc = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{2\sqrt{ac}}{n} dc - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{n}};$$

par contre, pour $a \geqq \frac{1}{4} n$,

$$\frac{1}{n} \int_0^n \frac{2\sqrt{ac}}{n} pc = \frac{1}{n} \left\{ \int_0^{\frac{n^2}{4a}} \frac{2\sqrt{ac}}{n} dc + \int_{\frac{n^2}{4a}}^n 1 \,.\, dc \right\} = 1 - \frac{n}{12a};$$

il en résulte finalement

$$4) \quad \left| \begin{aligned} q &= \frac{1}{n} \left\{ \int_0^{\frac{1}{4}n} \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{n}}\, pa + \int_{\frac{1}{4}n}^n \left(1 - \frac{n}{12a}\right) pa \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \int_0^{\frac{1}{4}n} \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{n}}\, da + \int_{\frac{1}{4}n}^n \left(1 - \frac{n}{12a}\right) da \right\} \\ &= \frac{31}{36} - \frac{1}{6}\, l\,.\,2. \end{aligned} \right.$$

Si l'on introduit cette valeur dans l'équation 1), on a la probabilité de racines IMAGINAIRES

$$5) \qquad Q = \frac{31}{72} - \frac{1}{12}\, l\,.\,2$$

et de là, la probabilité de racines RÉELLES

$$6) \qquad P = \frac{41}{72} + \frac{1}{12}\, l\,.\,2;$$

l'une et l'autre sont indépendantes de n, par conséquent valables aussi pour une valeur infiniment grande de cette limite (1).

---

(1) Voir dans l'Educ. Tim., tome XIX, page 25, une autre solution qu'a donnée J. J. SYLVESTER de ce problème posé par lui.

27. **Problème XIX**. — *Combien grande est la probabilité pour que l'équation cubique* $z^3 + pz + q = 0$, *dont les coefficients peuvent avoir des valeurs quelconques entre les limites respectives* $\pm$ P, $\pm$ Q, *ne fournisse que des racines réelles?*

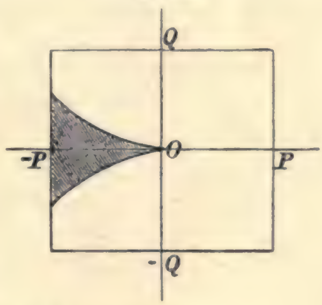
Solution. — On envisage de nouveau p, q comme les coordonnées x, y d'un point du plan; le domaine des cas possibles est limité, en représentation géométrique, par un rectangle dont les angles ont les coordonnées $\pm P$, $\pm Q$ et dont la superficie est donc $4\,PQ$.

Si les racines de l'équation doivent être réelles, les coefficients doivent satisfaire à la condition $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leqq 0$ ou

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 \leqq 0;$$

pour le signe inférieur, cette condition représente une parabole semi-cubique, par laquelle le rectangle, plus haut mentionné, des cas possibles, est séparé en deux domaines, celui des cas favorables et celui des cas défavorables.

Fig. 12.



α) Est $Q^2 \geqq \frac{4}{27} P^3$? La parabole a la position indiquée dans la fig. 12 et le domaine (haché dans le dessin) des cas favorables a la superficie

$$2\int_0^P \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{8\sqrt{3}}{45} P^{\frac{5}{2}};$$

la probabilité correspondante est

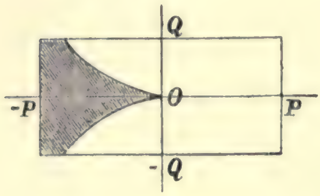
$$1) \qquad \Pi = \frac{2\sqrt{3}}{45} \cdot \frac{P^{\frac{3}{2}}}{Q}.$$

β) Pour $Q^2 < \frac{4}{27} P^3$, la parabole prend la position indiquée dans la fig. 13 (p. 42); le domaine des cas favorables a la superficie

$$2PQ - 2\int_0^Q \frac{3}{\sqrt[3]{4}} y^{\frac{2}{3}} dy = 2PQ - \frac{18}{5\sqrt[3]{4}} Q^{\frac{5}{3}}$$

et la probabilité de racines réelles s'exprime par

Fig. 13.



$$2)\qquad \Pi = \frac{1}{2} - \frac{9(2Q^2)^{\frac{1}{3}}}{20P}.$$

Pour le cas limite $Q^2 = \frac{4}{27}P^3$ les deux formules 1), 2) fournissent la même valeur, savoir $\Pi = \frac{1}{5}$.

Au cas spécial $P = Q = 1$, la formule 1) est à appliquer et elle donne

$$\Pi = \frac{2\sqrt{3}}{45}.\ (^1)$$

28. **Problème XX.** — *Combien grande est la probabilité pour que toutes les racines de l'équation cubique* $ax^3 + bx + c = 0$ *soient réelles, lorsque les coefficients* a, b, c *peuvent avoir des valeurs réelles quelconques.*

Solution. — De la condition générale pour les racines réelles,

$$\left(\frac{c}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3 \leqq 0,$$

résultent les deux conditions particulières : 1) que a et b soient désignés inégaux; 2) quant à la valeur numérique, que soit

$$c \leqq \left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La probabilité de l'accomplissement de la première condition

---

[1] Comparer à la note du n° 25. Pour le présent problème, LALANNE n'a pas pris en considération la différence des cas α). β) et a représenté la formule 1) comme généralement valable. Les valeurs spéciales de Π pour $P = Q = 1$ (pour des équations quadratiques et cubiques) ont été communiquées par LALANNE déjà en 1876 dans un mémoire (v. Comptes rendus, 1876, page 1847 et pages suivantes).

est $\frac{1}{2}$; relativement à la seconde condition, la probabilité s'énonce ω ; puis, on a la probabilité demandée

1) $$P = \frac{1}{2}\,\omega.$$

La probabilité pour que, lors de valeurs particulières de a et de b, une valeur quelconque de c — supposé que a, b, c se trouvent sous une limite commune — remplisse la condition susdite, est

$$\frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{da}{n}\,\frac{db}{n},$$

par conséquent

$$\omega = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{pa}{n}\int_0^n \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} pb.$$

Il reste de nouveau à rechercher l'étendue dans laquelle la fonction sous le signe d'intégration demeure une fraction propre.

L'étendue est

$$\frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq 1,$$

lorsque

2) $$b \leqq 3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}};$$

cette dernière condition est remplie pour toutes les valeurs admissibles de b, lorsqu'on a

$$3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq n \quad \text{ou} \quad a \geqq \frac{4}{27}\,n;$$

par contre, jusqu'à la limite déterminée par 2), lorsque

$$3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \leqq n \quad \text{ou} \quad a \leqq \frac{4}{27}\,n.$$

Donc on a pour $a \geqq \frac{4}{27}\,n$,

$$\frac{1}{n}\int^n \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} pb - \frac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right) db - \frac{4}{45}\left(\frac{3n}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et pour $a \leqq \frac{4}{27}\,n$,

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} pb - \frac{1}{n}\int_0^{3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{n}\left(\frac{4b^3}{27a}\right)^{\frac{1}{2}} db + \frac{1}{n}\int_{3\left(\frac{an^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}^{n} 1\,.\,db$$

$$= 1 - \frac{9}{10}\left(\frac{2a}{n}\right)^{\frac{1}{3}};$$

il en résulte ensuite

$$\omega = \frac{1}{n}\left\{\int_{\frac{4}{27}n}^{n} \frac{4}{45}\left(\frac{3n}{a}\right)^{\frac{1}{2}} pa + \int_0^{\frac{4}{27}n}\left[1 - \frac{9}{10}\left(\frac{2a}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right] pa\right\};$$

ici l'on peut remplacer dans les deux parties pa par da, parce que la fonction intégrée dans l'intervalle d'intégration correspondant demeure une fraction positive propre. Après le calcul de l'intégrale, il vient

$$\omega = \frac{8}{45}\sqrt{3} - \frac{1}{27};$$

si l'on substitue cette valeur dans l'équation 1), enfin s'obtient

$$P = \frac{4}{45}\sqrt{3} - \frac{1}{54}.$$

Comme cette expression ne dépend pas de la limite n introduite primitivement, des coefficients, elle est valable aussi lorsque cette limite augmente infiniment.

29. **Problème XXI**. — *Dans l'équation* $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$, *les coefficients* a, h, b *prennent des valeurs réelles quelconques. Avec quelle probabilité la section conique, représentée par cette équation, est-elle une ellipse, est-elle imaginaire ou est-elle une hyperbole, particulièrement est-elle une hyperbole qui coupe les deux axes coordonnés en des points réels ou ne coupe qu'un ou aucun de ces axes?*

Solution. — Le genre de la section conique dépend des signes de a et de b et dépend de la valeur numérique du déterminant $\Delta = ab - h^2$.

1) La section conique est une ellipse lorsque a et b et Δ sont positifs; par conséquent la probabilité y relative est

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^n \int_0^n \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{da}{n} \cdot \frac{db}{n} \cdot \frac{dh}{n} = \frac{1}{9}.$$

2) La section conique est imaginaire lorsque a et b sont négatifs et que Δ est positif; la probabilité y relative est donc la même que la précédente,

$$p_2 = \frac{1}{9}.$$

3) La section conique est une hyperbole qui coupe les deux axes coordonnés en des points réels lorsque a et b sont positifs et que Δ est négatif. Conséquemment

$$p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^n \int_0^n \int_{\sqrt{ab}}^n \frac{da}{n} \cdot \frac{db}{n} \cdot \frac{dh}{n} = \frac{5}{36}.$$

4) La section conique est une hyperbole et ne coupe aucun des axes coordonnés lorsqu'on a $a < 0$, $b < 0$, $\Delta < 0$; par conséquent

$$p_4 = \frac{5}{36}.$$

5) La section conique est une hyperbole et ne coupe qu'un des deux axes lorsque a, b sont désignés inégaux; par suite

$$p_5 = \frac{1}{2}.$$

6) Enfin la probabilité pour que la section conique représentée par l'équation proposée soit en général une hyperbole est exprimée par

$$p_6 = p_3 + p_4 + p_5 = \frac{7}{9}.$$

30. **Problème XXII.** — *Deux personnes,* A, B, *s'accordent pour se rencontrer, un certain jour, en un endroit déterminé, mais ne conviennent pas du moment avec plus de précision qu'en le plaçant entre 2 et 3 heures; chacune promet, en cas d'arrivée antérieure, d'attendre l'autre pendant dix minutes. Quelle est la probabilité pour que ces personnes se rencontrent?*

Solution. — Pour obtenir une solution générale, on considère l'espace de temps dans lequel la rencontre peut avoir lieu comme unité de temps. Compté du commencement de cet espace de temps, soit x le temps après lequel A, y le temps après lequel B, au lieu déterminé, arrivent; par suite, x et y peuvent prendre toutes les valeurs entre 0 et 1.

Dès lors, si l'on envisage x et y comme les coordonnées d'un point du plan, le domaine des cas possibles est délimité par un carré, dont le côté et la superficie sont 1.

Puis, deux cas sont à différencier.

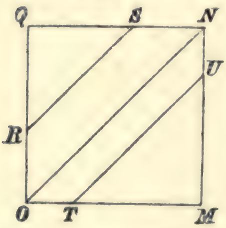
1. A arrive antérieurement à B et attend pendant l'intervalle de temps a; la rencontre a lieu lorsque

$$1) \qquad x < y < x + a.$$

2. B arrive antérieurement à A et attend pendant le temps b; la rencontre a lieu lorsque

$$2) \qquad y < x < y + b.$$

Fig. 14.



Pour délimiter le domaine dont les points correspondent à l'une des conditions 1), 2), on construit (fig. 14) $OR = a$, $OT = b$, RS et TU parallèles à ON. Les points à l'intérieur de l'hexagone $OTUNSR$ satisfont à 1) ou à 2), les points à l'extérieur de l'hexagone ne satisfont à aucune de ces conditions. Par conséquent, la probabilité d'une rencontre est [1]

$$p = 1 - \frac{1}{2}(1-a)^2 - \frac{1}{2}(1-b)^2 = a + b - \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Pour l'application au cas spécial de la question, il faut poser $a = b = \frac{1}{6}$ et on obtient comme probabilité de la rencontre

---

(1) H. Laurent donne, dans son " Traité du calcul des probabilités " (Paris, 1873), page 67, une solution analytique de cette question, solution qui cependant est erronée et conduit à un résultat de forme logarithmique. En désignant l'espace de temps, complet, par T, celui de l'attente par τ, Laurent pose, pour la probabilité pour que B rencontre A arrivé plus tôt (au temps t, calculé du point d'origine du temps T), l'expression $\frac{dt}{T} \cdot \frac{\tau}{T-t}$, alors que l'expression devrait s'énoncer : $\frac{dt}{T} \cdot \frac{T-t}{T} \cdot \frac{\tau}{T-t} = \frac{dt}{T} \cdot \frac{\tau}{T}$.

$$p = \frac{11}{36},$$

comme probabilité de la non-rencontre

$$q = \frac{25}{36}.$$

31 **Problème XXIII.** — *Un diamant brut de poids* a *est divisé arbitrairement en deux, en trois fragments. Supposé que la valeur croisse proportionnellement au carré du poids, la valeur mathématique, respectivement des deux, des trois fragments, est à découvrir.*

Solution. — 1. La probabilité pour que l'un des deux fragments ait le poids x, l'autre, donc, le poids a-x, est $\frac{dx}{a}$; si l'on désigne par k la valeur de l'unité de poids, la valeur présumable des deux fragments est

$$k \int_0^a [x^2 + (a - x)^2] \frac{dx}{a} = \frac{2}{3} k a^2,$$

de manière que la perte de valeur à craindre s'élève à $\frac{1}{3}$ de la valeur primitive. Cela correspond à une division réelle en deux parties d'environ $\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{5}$ du diamant.

2. Dans le second cas, la solution géométrique s'établit plus intuitivement et plus simplement que l'analytique. L'équation

1) $$x + y + z = a,$$

rapportée à un système de coordonnées rectangulaires de l'espace, échoit à un triangle qui découpe sur les trois axes coordonnés l'étendue a. Si l'on désigne la surface de ce triangle par F_1, l'élément attenant au point x, y, z du dit triangle par dF, on a

$$k \int (x^2 + y^2 + z^2) \frac{dF}{F_1}$$

pour l'expression de la valeur mathématique des trois fragments; l'intégrale est à étendre à la surface complète du triangle. Si l'on appelle r la distance du point x, y, z au pied de la perpendiculaire dirigée de l'origine sur le plan du triangle $\left(\text{perp.} = \frac{1}{3} a\sqrt{3}\right)$, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + \frac{a^2}{3}$; l'expression ci-dessus s'énonce alors

$$k\int\left(r^2 + \frac{a^2}{3}\right)\frac{dF}{F_1} = k\int r^2\frac{dF}{F_1} + k\frac{a^2}{3}.$$

L'intégrale du premier terme à droite exprime le carré du rayon d'inertie du triangle équilatéral 1) par rapport à un axe passant par le centre de gravité de ce triangle et dirigé normalement à son plan; comme $a\sqrt{2}$ est le côté de ce triangle, on a

$$\int r^2\frac{dF}{F_1} = \frac{a^2}{6};$$

et la valeur présumable des trois fragments égale par conséquent

$$\frac{1}{2}ka^2,$$

la perte mathématique de valeur s'élève conformément à cela. à la moitié de la valeur primitive. Cela correspond à une division réelle en trois parties d'environ $\frac{13}{20}$, $\frac{5}{20}$ et $\frac{2}{20}$ du diamant.

32. La courbe de probabilité. — Dans les questions présentées jusqu'ici sur les probabilités qui dépendent d'une grandeur continûment variable, les valeurs de cette grandeur, entre des limites données, étaient supposées également probables; en conséquence, la probabilité pour qu'une valeur prise à volonté des variables, tombe dans un intervalle désigné, infiniment petit ou fini, était indépendante de la place de cet intervalle par rapport aux limites des variables et était stipulée seulement par la grandeur de cet intervalle.

Mais il y a des cas où les valeurs des variables ne sont pas à priori également probables. La probabilité pour qu'une valeur choisie à volonté appartienne à un intervalle déterminé infiniment petit $x \ldots x + dx$ dépend alors non seulement de l'étendue dx de cet intervalle, mais aussi de sa place, qui est caractérisée par la valeur initiale x; cette probabilité se réprésente analytiquement sous la forme

1) $$p = \varphi(x)\,dx.$$

La courbe dont l'équation est

2) $$y = k\varphi(x)$$

— k signifie une constante — donne une image intuitive du cours, de la marche de cette probabilité et est dite, pour ce motif, la COURBE DE PROBABILITÉ; elle s'emploie avantageusement, fréquemment dans la solution de questions relatives à la probabilité.

Si l'on se représente un grand nombre de valeurs de x prises arbitrairement et dans le sens de cette représentation géométrique, projetées comme abscisses, on est conduit, dans l'axe des abscisses, à une série irrégulière de points, qui demeure irrégulière aussi, lorsque la quantité des valeurs de x ou des points croît à l'infini. La multitude, ou COMPACITÉ ou DENSITÉ des points dans un élément désigné dx, ou la probabilité pour qu'une valeur ultérieure, prise à volonté, de x, tombe dans cet élément, est proportionnelle à l'élément de surface de la courbe 2), à l'élément de surface se trouvant au-dessus de l'élément dx ou, lorsque dx est envisagé comme constant, est proportionnelle à l'ordonnée de la courbe de probabilité, à l'ordonnée correspondante à la valeur initiale de l'élément.

Dans quelques cas, l'abscisse, dont l'ordonnée correspondante divise en deux parties égales l'aire complète de la courbe 2), porte le nom de VALEUR PROBABLE DE x.

33. **Exemple I.** — *Deux grandeurs* A, B *ont été mesurées; chacun de ces mesurages est entaché d'une erreur, et toutes valeurs de cette erreur, qui est liée aux limites* $\pm$ a, *sont supposées également probables. Trouver la probabilité pour que l'erreur de la somme* A + B *se trouve entre les limites données et trouver la valeur probable de cette erreur.*

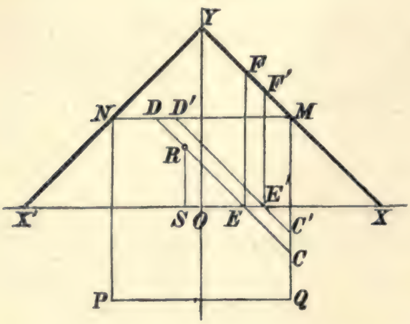
Solution. — On désigne par x l'erreur du mesurage de A, par y l'erreur de B, et on considère x, y comme les coordonnées d'un point du plan; le domaine des combinaisons possibles des valeurs de x et de y est rendu percevable par un carré $MNPQ$ (Fig. 15, p. 50) de longueur de côté $2a$.

Fixe-t-on son attention sur la combinaison des valeurs x, y, qui conduit au point R? L'erreur correspondante dans la somme $A + B$ est

$$\varepsilon = x + y = OE;$$

mais toutes les combinaisons des valeurs x, y, qui appartiennent aux points de la transversale CD du carré, inclinée à 45°, donnent la même valeur $\varepsilon = OE$ de l'erreur des sommes.

Fig. 15.



On fait $EE'' = d\varepsilon$; on tire $C'D'$ par E' parallèlement à CD; à tous les points du trapèze $CDD'C'$ correspondent des erreurs entre les limites ε et $\varepsilon + d\varepsilon$; la probabilité d'une erreur dans cet intervalle est donc proportionnelle à l'aire de ce trapèze, et celle-ci — quand $d\varepsilon$ est constant — est proportionnelle à la projection de CD sur XX' ou sur YY', à la longueur CM. Donc, fait-on l'ordonnée $EF = CM$? Les points F donnent la courbe de probabilité de la somme des erreurs ε; la courbe se compose des deux droites XY, $X'Y$ qui sont inclinées également vers l'axe des abscisses.

La probabilité d'une erreur entre les limites $\varepsilon = OE$ et $\varepsilon + d\varepsilon = OE'$ est

$$p = \frac{EE'F'F}{XX'Y} = \frac{EF \,.\, d\varepsilon}{4a^2} = \frac{2a - \varepsilon}{4a^2}\, d\varepsilon,$$

la probabilité d'une erreur entre 0 et $\varepsilon = OE$

$$P = \frac{OEFY}{XX'Y} = \frac{(4a - \varepsilon)\,\varepsilon}{8a^2},$$

la probabilité d'une erreur entre les limites $\pm\, \varepsilon$

$$P' = 2P = \frac{(4a - \varepsilon)\,\varepsilon}{4a^2}.$$

De l'équation

$$\frac{(4a-\varepsilon)\,\varepsilon}{4a^2} = \frac{1}{2},$$

résulte la valeur numérique de l'erreur probable dans $A + B$, savoir

$$a(2-\sqrt{2}).$$

Remarque. — L'hypothèse faite plus haut, que toutes les valeurs de l'erreur d'un mesurage sont également probables, ne se trouve pas réalisée ou, dans les cas les plus rares, se rencontre réalisée de manière approximative. D'après la théorie des erreurs fondée par Gauss, la probabilité pour que l'erreur d'un mesurage se trouve entre les limites x et $x + dx$, est

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} . dx.$$

La courbe de probabilité

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

est une ligne transcendante se composant de deux branches symétriques qui se rapprochent asymptotiquement de l'axe des abscisses, chacune avec un point d'inflexion.

34. **Exemple II**. — *Dans l'étendue* AB = 1 *est pris arbitrairement un point* Y *et ensuite dans l'étendue* AY *un second point* X *est pris arbitrairement. Trouver la probabilité pour que la lougueur* AX *se trouve dans des limites données, et découvrir la valeur probable de* AX.

Solution. — La probabilité pour que les points Y, X possèdent les distances déterminées y, x de A, est $\frac{dy}{1} \cdot \frac{dx}{y} = \frac{dx dy}{y}$; par conséquent, la probabilité totale pour qu'avec une valeur quelconque de y le point X tombe dans l'intervalle $x \ldots x + dx$, est

$$p = dx \int_x^1 \frac{dy}{y} = -l . x . dx.$$

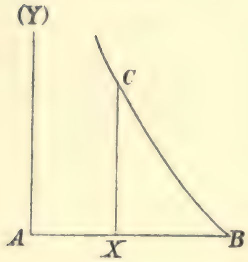
Celle-ci est dépendante de x et la courbe correspondante de probabilité est une ligne logarithmique qui se rapproche asymptotiquement de l'axe des ordonnées.

L'aire $AXC(Y)$ (Fig. 16), qui se trouve au dessus de l'abscisse $AX = x$, a la superficie

$$xl.\frac{e}{x},$$

l'aire totale $AB(Y)$ a la superficie 1. Par conséquent, la probabilité pour que AX soit renfermé entre des limites données x_1, x_2 est

Fig. 16.



$$P = x_2\, l.\frac{e}{x^2} - x_1\, l.\frac{e}{x_1} = l.\frac{\left(\frac{e}{x_2}\right)^{x_2}}{\left(\frac{e}{x_1}\right)^{x_1}}.$$

La valeur probable de x se donne par l'équation

$$xl.\frac{e}{x} = \frac{1}{2}$$

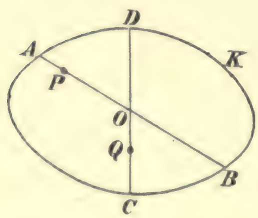
et s'élève à un peu moins que $\frac{1}{5}$ de AB.

2. Points dans des surfaces.

35. **Problème I.** — *Dans une figure plane dont la délimitation est formée par une courbe* K *centralement symétrique, trois points* P, Q, R *sont pris arbitrairement. Quelle est la probabilité pour que le triangle* PQR *enserre le point milieu de* K?

Solution. — Soient P, Q, (Fig. 17) les deux points choisis tout d'abord. On mène par ceux-ci les diamètres AB, CD. Le triangle PQR n'enserrera le point milieu O que lorsque le troisième point R tombera dans le secteur $BODK$, c'est-à-dire quand il est séparé, tant par le diamètre AB, de Q, que par le diamètre CD, de P; comme chacun de ces événements simples a la probabi-

Fig. 17.



lité $\frac{1}{2}$, la probabilité composée de leur rencontre ou de l'événement en question est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (¹).

36. **Problème II**. — *Dans la surface d'un triangle équilatéral un point est pris à volonté; de celui-ci sont menées des perpendiculaires aux côtés. Trouver la probabilité pour qu'avec ces trois perpendiculaires un triangle acutangle se laisse former.*

Solution. — La somme des trois perpendiculaires produites dans la question égale la hauteur du triangle; à la prise arbitraire du point dans le triangle, correspond conséquemment la division arbitraire de la hauteur en trois parties, et la probabilité pour qu'avec ces parties un triangle acutangle soit possible, a été trouvée dans le problème X, N° 16, égale à

$$p = 3l\,.\,2 - 2.$$

37. **Problème III.** — *Une cible circulaire de surface* A *a été atteinte par un coup de feu; la probabilité pour que celui-ci soit arrivé dans une partie limitée à volonté, de superficie* a *est* $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{A}}$. *Quelle valeur prend cette probabilité lorsqu'il est su d'un autre coup tiré contre la cible, que ce coup a atteint la cible à une distance plus grande, moins grande du point milieu que le coup précisément considéré?*

Solution. — 1. On se représente la partie a de la cible découpée par des arcs de cercle concentriques décrits du point milieu comme centre, en bandes élémentaires; soient r_1, r_2 les rayons extrêmes de ces arcs; la superficie de l'élément auquel les rayons x et $x + dx$ échoient se figure alors sous la forme $f(x)\,dx$, de sorte qu'on a

$$a = \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx.$$

La probabilité pour qu'un coup atteigne la cible dans

(1) Comparer à la solution circonstanciée de C. Jordan dans le tome I du Bull. de la Soc. Mathém. de France, page 256.

l'élément mentionné est $\frac{f(x)\,dx}{\pi r^2}$, r désignant le rayon de la cible entière; la probabilité pour qu'un coup atteigne la cible à une distance du centre, plus grande que x, est $\frac{\pi(r^2 - x^2)}{\pi r^2}$; de là résulte la probabilité pour que le MEILLEUR coup (qu'il soit le premier ou le second) atteigne la cible dans la partie a :

$$p_1 = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{f(x)\,dx}{\pi r^2} \cdot \frac{\pi(r^2 - x^2)}{\pi r^2}$$

$$= \frac{r^2 \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx - \int_{r_1}^{r_2} x^2 f(x)\,dx}{\frac{1}{2}\pi r^4};$$

la première intégrale du numérateur donne la superficie a. la seconde le moment d'inertie m de cette partie de la cible, pendant que le dénominateur est égal au moment d'inertie M de la surface totale de la cible, les deux moments rapportés à un axe normal à la surface de la cible, passant par son point milieu. Par conséquent, on obtient

$$1) \qquad p_1 = 2\frac{a}{A} - \frac{m}{M}.$$

Mais cela est aussi la probabilité du premier cas se trouvant en question : car là le meilleur coup doit frapper la partie a de la cible.

2. La probabilité pour qu'un coup frappe l'élément marqué plus haut de a est $\frac{f(x)dx}{\pi r^2}$; la probabilité pour qu'un coup l'atteigne à un éloignement du centre plus petit que x est $\frac{\pi x^2}{\pi r^2}$; par conséquent, la probabilité pour que le plus mauvais coup (indifféremment le premier ou le second) touche la partie a est

$$2) \qquad p_2 = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{f(x)\,dx}{\pi r^2} \cdot \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} x^2 f(x)\,dx}{\frac{1}{2}\pi r^4} = \frac{m}{M}.$$

Cela est en même temps la probabilité du second cas de la question : car là il s'agit que le plus mauvais coup puisse frapper la partie a de la cible.

Remarque. — On a $p_1 + p_2 = 2\frac{a}{A} = 2p$; cela doit être, puisque la somme du premier membre signifie la probabilité pour que de deux coups, l'un — le meilleur ou le plus mauvais — touche la partie a de la cible.

Si les rayons d'inertie de A et de a, par rapport à l'axe déterminé sont également grands, c'est-à-dire si l'on a

$$M = A\,.\,k^2, \quad m = a\,.\,k^2,$$

la relation intéressante

$$p_1 = p_2 = \frac{a}{A} = p$$

est trouvée.

38. **Problème IV**. — *Dans la surface d'un cercle donné, deux points* P, Q *sont pris arbitrairement. Trouver la probabilité pour que le cercle décrit de* P *comme centre avec le rayon* PQ *soit dans le cercle donné.*

Solution. — On choisit le rayon du cercle donné comme unité; la probabilité pour que le point P se trouve à l'éloignement x du centre, c'est-à-dire dans l'anneau circulaire ayant pour rayons x et $x + dx$, est $\frac{2\pi x.dx}{\pi} = 2x.dx$; si Q tombe, lors de cette position de P, dans la surface d'un cercle décrit de P avec le rayon $1 - x$, il est correspondu aux conditions de la question; la probabilité de ce second événement simple est $\frac{\pi(1-x)^2}{\pi} = (1-x)^2$.

Par là, la probabilité totale, composée de l'événement en question s'obtient :

$$p = \int_0^1 2x\,(1-x)^2\,dx = \frac{1}{6}.$$

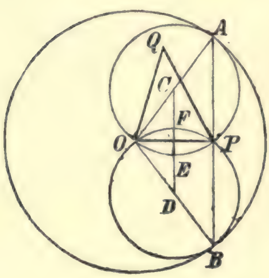
39. **Problème V.** — *Deux points* P, Q *pris à volonté à l'intérieur d'un cercle donné, sont reliés entre eux et avec le centre* O *en un triangle. Trouver la probabilité pour que la circonférence circonscrite à ce triangle soit renfermée dans le cercle donné.*

Solution. — Que le point P vienne à se trouver à la distance $OP = x$ (Fig. 18) du centre; la probabilité pour qu'il en soit ainsi s'élève à $\frac{2\pi x dx}{\pi} = 2x dx$; lorsque, comme précédemment, le rayon du cercle donné est pris pour unité.

Il reste à rechercher maintenant les positions favorables de Q pour cette position de P.

On mène la corde AB rectangulairement à OP et on décrit des circonférences sur les rayons OA, OB comme diamètres; soient C, D leurs centres; la centrale CD coupe les circonférences aux points E, F. On reconnaît aussitôt qu'aux conditions de la question il sera correspondu lorsque le point Q vient à se trouver dans une des surfaces $PFOAP$ ou $PEOPB$. La probabilité pour que lors de la position prise par P, le point Q reçoive une position favorable est exprimé conséquemment par

Fig. 18.



$$\frac{ar\,.\,PFOAP + ar\,.\,PEOBP}{\pi}.$$

Si l'on pose l'angle $OAP = \theta$, la somme se trouvant au numérateur, considérée comme double surface du cercle C diminuée de la double surface de $OEPF$, devient égale à

$$\tfrac{1}{2}\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta.$$

La probabilité totale, composée de l'événement se trouvant en question est par conséquent

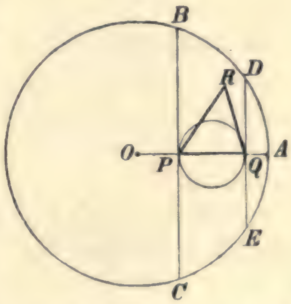
$$p = \int_0^1 2x\,dx \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta - \frac{3}{8} \cdot \text{(1)}$$

40. **Problème VI**. — *Dans un rayon quelconque d'un cercle donné, deux points sont pris arbitrairement et un troisième point est pris arbitrairement dans la surface du cercle; trouver la probabilité pour que les trois points soient les sommets d'un triangle acutangle.*

Solution. — Soient P, Q (Fig. 19) les deux premiers points pris dans le rayon OA mené à volonté, lequel servira comme unité de longueur; on pose $OP = x$, $OQ = y$; $dx\,dy$ est la probabilité pour que les points P, Q possèdent la position prise.

Fig. 19.



Pour obtenir les positions favorables, dépendantes du troisième point R, on mène par P, par Q rectangulairement à OA des cordes BC, DE et on décrit sur PQ comme diamètre un cercle. Aussi souvent que R tombe entre les cordes, cependant à l'extérieur de ce cercle, il est correspondu aux conditions de la question. La probabilité donc pour que lors des positions prises par P, Q une position favorable de R ait lieu, est

(1) Dans cette forme, le problème a été établi et résolu par le professeur Seitz, dans l'Éduc. Tim., tome XXXII, pag. 106. Le problème présenté par Watson dans l'Éduc. Tim., tome XXVI, pag. 77, est identique au présent problème, la solution communiquée là, de C. Leudesdorf, donnant le résultat $\frac{\pi^2}{16}$, est inexacte, parce qu'elle ne correspond pas à une répartition uniforme des points sur la surface du cercle.

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[arc\cos x-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[arc\cos y-(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\,\pi\,(y-x)^2\right\}.$$

La probabilité totale, composée de l'événement susdit, à la considération de ce que P et Q peuvent être permutés, est conséquemment

$$p=\frac{2}{\pi}\int_0^1\int_x^1\left\{\left[arc\cos x-x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[arc\cos y-y(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\,\pi\,(y=x)^2\right\}dx\,dy$$

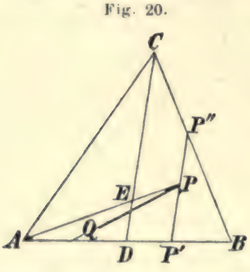
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left\{arc\cos x-x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+x\,arc\cos x-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{12}\,\pi\,(1-x)^3\right\}dx$$

$$=\frac{2}{3\pi}-\frac{1}{6}.$$

41. **Problème VII.** — *Le milieu de la base d'un triangle est joint au sommet opposé; dans chacun des deux triangles partiels est pris à volonté un point. Quelle est la probabilité pour que la ligne de jonction des deux points coupe la ligne de base du triangle?*

Solution. — Soit P le point pris dans le triangle BCD (Fig. 20), on désigne les coordonnées obliques de P, DP', $P'P$ par x, y; on pose $AB=2a$, $CD=b$; la probabilité de la position désignée de P est donnée par la fraction $\dfrac{dx\,dy}{\frac{1}{2}ab}$.

Fig. 20.



Pour découvrir les positions favorables correspondantes à P, du second point Q, on joint P à A. Seulement lorsque Q tombe dans le triangle ADE, la droite PQ coupera la base, à savoir la moitié AD de celle-ci. Conséquemment, la probabilité d'une position favorable de Q est égale à

$$\frac{\Delta\,ADE}{\Delta\,ADC}=\frac{DE}{DC}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{a+x}$$

et la probabilité totale de l'événement produit dans le texte, pour toutes les positions du point P dans le triangle BCD, est égale à

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} \frac{a}{b}\cdot\frac{y}{a+x}\cdot\frac{dx\,dy}{\frac{1}{2}ab} = 4l.2 - \frac{5}{2}.$$

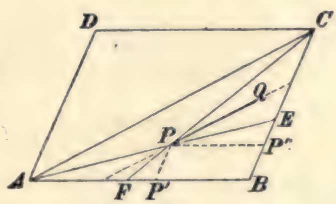
La même probabilité s'obtient lorsqu'on donne au point Q toutes les positions dans le triangle ACD, de sorte que la valeur définitive de la probabilité est égale à

$$p = 8l.2 - 5.$$

42. **Problème VIII.** — *Dans la surface d'un parallélogramme donné, deux points sont pris arbitrairement; trouver la probabilité pour que leur ligne de jonction coupe des côtés opposés du parallélogramme.*

Solution. — Soit P (fig. 21) un des deux points; on pose $AB = a$, $BC = b$, l'angle $ABC = \alpha$ et les coordonnées obliques de P, $AP' = x = a\xi$, $P'P = y = b\eta$; ainsi la probabilité de la position marquée de P est exprimée par $\frac{dx\,dy\sin\alpha}{ABCD}$. Nous considérons les positions de Q pour lesquelles la ligne PQ coupe les côtés CONTIGUS AB, BC et tirons, à cette fin, les lignes AC, APE, CPF; un cas favorable arrive lorsque Q tombe dans un des triangles AFP, CEP et la probabilité de cela est

Fig 21.



$$\frac{\Delta\,AFP + \Delta\,CEP}{ABCD};$$

par conséquent, la probabilité totale pour que les côtés contigus AB, BC soient rencontrés par PQ s'énonce

$$1)\quad q = \frac{1}{(ABCD)^2}\int\int(\Delta\,AFP + \Delta\,CEP)\,dx\,dy\sin\alpha,$$

l'intégrale étendue à la surface du triangle ABC.

Si l'on exprime les surfaces des triangles en fonction des grandeurs a, b, ξ, η et introduit les limites correspondantes, on obtient

$$\int\int(\varDelta\, AFP + \varDelta\, CEP)\, dx\, dy \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\, a^2 b^2 \sin^2\alpha \int_0^1\int_0^\xi \left[\frac{\xi-\eta}{1-\eta}\,\eta + \frac{\xi-\eta}{\xi}(1-\xi)\right] d\xi\, d\eta,$$

ou plus conformément au but proposé, en changeant dans la première partie l'ordre des intégrations

$$\frac{1}{2}\, a^2 b^2 \sin^2\alpha \left\{\int_0^1 d\eta \int_\eta^1 \frac{\xi-\eta}{1-\eta}\,\eta\, d\xi + \int_0^1 d\xi \int_0^\xi \frac{\xi-\eta}{\xi}(1-\xi)\, d\eta\right\}$$

$$= \frac{1}{12}\, a^2 b^2 \sin^2\alpha.$$

Et si l'on écrit abréviativement pour $dx\, dy \sin\alpha$, $d\,(\varDelta\, ABC)$

$$2)\qquad \int\int(\varDelta\, AFP + \varDelta\, CEP)\,.\, d\,(\varDelta\, ABC) = \frac{1}{3}\,(\varDelta\, ABC)^2,$$

l'intégration étendue au triangle ABC.

Et si l'on introduit la valeur trouvée dans l'équation 1), on a

$$3)\qquad q = \frac{1}{3}\left(\frac{\varDelta\, ABC}{ABCD}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Pour les trois couples restantes de côtés contigus se donne la même valeur, de manière que la probabilité totale pour que la droite PQ coupe une couple de côtés contigus du parallélogramme est égale à

$$4)\qquad Q = 4q = \frac{1}{3},$$

et la probabilité pour que des côtés opposés soient rencontrés

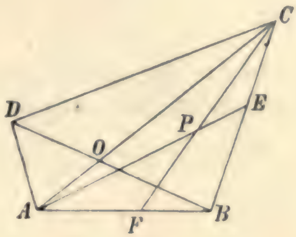
$$5)\qquad P = 1 - Q = \frac{2}{3}.\text{(1)}$$

(1) Pour ce problème et pour le problème précédent, il peut être dit que la probabilité demandée est indépendante de la forme et des dimensions de la figure donnée. Car tout triangle dérive, par projection parallèle,

43. **Problème IX.** — *Dans la surface d'un quadrilatère convexe dont les diagonales se divisent dans les proportions $\lambda : (1-\lambda)$ et $\mu : (1-\mu)$, deux points sont pris arbitrairement; trouver la probabilité pour que leur ligne de jonction coupe les deux diagonales dans le quadrilatère.*

Solution. — Soit $ABCD$ (fig. 22) le quadrilatère donné; $\frac{OA}{AC} = \lambda$, $\frac{OB}{BD} = \mu$, $\angle BOC = \alpha$.

Fig. 22.



Nous partons d'une position de l'un des points P dans le triangle ABC et nous cherchons les positions du second point Q, pour lesquelles la droite PQ ne rencontre que la diagonale BD dans le quadrilatère, c'est-à-dire ne rencontre que la section OB de celle-ci; manifestement, cela arrive quand Q vient à se trouver dans l'un des triangles AFP, CEP. La probabilité pour que la droite PQ ne coupe que l'étendue OB est donc

$$q_1 = \int\int \frac{\Delta AFP + \Delta CEP}{ABCD} \cdot \frac{d(\Delta ABC)}{ABCD}$$
$$= \frac{1}{(ABCD)^2} \int\int (\Delta AFP + \Delta CEP)\, d(\Delta ABC),$$

l'intégration étendue à la surface du triangle ABC. Avec utilisation de la valeur trouvée lors de la solution du problème précédent, n° 42, équation 2), pour cette intégrale, on a

$$1)\quad q_1 = \frac{1}{3}\frac{(\Delta ABC)^2}{(ABCD)^2} = \frac{1}{3}\frac{AC^2 . OB^2 . \sin^2\alpha}{AC^2 . BD^2 . \sin^2\alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{OB^2}{BD^2}.$$

---

d'un triangle équilatéral, tout parallélogramme d'un carré, et les relations, desquelles il s'est agi dans les questions mentionnées, sont de nature projective; conséquemment la probabilité pour les deux figures reste la même. Mais il est clair qu'elle ne peut pas dépendre chez le triangle équilatéral, relativement chez le carré, de la longueur du côté. Par conséquent, il est admissible de partir dans le problème VII d'un triangle isocèle ou équilatéral, dans le problème VIII d'un rectangle ou d'un carré.

Semblablement, on obtient pour la probabilité pour que la droite PQ ne coupe respectivement QUE l'étendue OD, ou OA, ou OC, les valeurs

$$2) \qquad q_2 = \frac{1}{3}\frac{OD^2}{BD^2},$$

$$3) \qquad q_3 = \frac{1}{3}\frac{OA^2}{AC^2},$$

$$4) \qquad q_4 = \frac{1}{3}\frac{OC^2}{AC^2}.$$

Donc la probabilité pour que la droite PQ ne coupe qu'UNE des deux diagonales dans le quadrilatère est

$$5) \quad \left\{ \begin{aligned} q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= \frac{1}{3}\left\{\frac{OA^2 + OC^2}{AC^2} + \frac{OB^2 + OD^2}{BD^2}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + \mu^2 + (1-\mu)^2\right\} \end{aligned} \right.$$

et la probabilité demandée pour que les DEUX diagonales soient coupées est

$$6) \qquad p = 1 - q = \frac{1}{3}\left\{1 + 2(\lambda + \mu) - 2(\lambda^2 + \mu^2)\right\}.$$

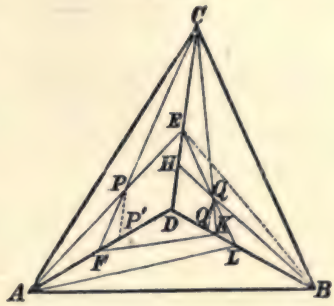
Dans un parallélogramme $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ et les formules 5), 6) donnent les valeurs spéciales

$$q = \frac{1}{3}, \quad p = \frac{2}{3}.$$

44. **Problème X**. — *Dans chacune de quelques trois faces d'un tétraèdre un point est pris arbitrairement; trouver la probabilité pour que le plan mené par ces trois points coupe la quatrième face du tétraèdre ou pour que la section faite soit un quadrilatère.*

Solution. — La figure 23 (p. 63) représente le tétraèdre projeté sur le plan de base. Soient P, Q deux des trois points, se trouvant dans les faces latérales ACD, BCD. Nous nous donnons premièrement la tâche de découvrir les positions du troisième point R dans la face ABD, pour lesquelles le plan déterminé par P, Q, R NE coupe PAS la surface de base ABC. A cet effet, nous menons un plan par C, P, Q, qui coupe le tétraèdre suivant le triangle CFK, nous nous imaginons ce plan tournant autour de la droite PQ (corde du tétraèdre), jusqu'à ce qu'il passe par A, pour laquelle position limite, il rencontre le tétraèdre suivant le triangle AEL. — De plus, LA SUPPOSITION EST FAITE, que la droite APE coupe l'arête CD plus loin de D que la droite BQH. Pendant cette rotation, le plan coupe le tétraèdre suivant des triangles, sinon toujours suivant des quadrilatères. Par conséquent, pour que le plan passant par P, Q, R ne puisse pas rencontrer la face de base du tétraèdre, le point R doit être pris dans le quadrilatère $AFKL$. Pour la position choisie des points P, Q, s'obtient donc, comme probabilité de la non-section de ABC, l'expression

Fig. 23



$$1)\qquad \frac{AFKL}{\Delta ABD}\cdot\frac{d(\Delta ACD)}{\Delta ACD}\cdot\frac{d(\Delta BCD)}{\Delta BCD}.$$

On pose maintenant $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$; les coordonnées obliques des points P, Q, savoir $DP' = ax$, $P'P = cy$, $DQ' = bx'$, $Q'Q = cy'$, ensuite, pour l'instant, $DE = nc$.

Puis on a

$$\frac{AFKL}{\Delta ABD} = \frac{DA \,.\, DL - DF \,.\, DK}{DA \,.\, DB},$$

en cela

$$DL = DQ' + Q'L = bx' + \frac{y'}{n}\, DL, \text{ d'où } DL = \frac{bx'}{1-\frac{y'}{n}};$$

$$DF = DP' + P'F = ax + y \,.\, DF, \text{ d'où } DF = \frac{ax}{1-y};$$

$$DK = DQ' + Q'K = bx' + y' \,.\, DK, \text{ d'où } DK = \frac{bx'}{1-y'};$$

donc on a ensuite

$$2)\qquad \frac{AFKL}{\Delta ABD} = \frac{x'}{1-\frac{y'}{n}} - \frac{xx'}{(1-y)(1-y')};$$

puis il vient

$$
3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d(\Delta ACD)}{\Delta ACD} &= \frac{a\,dx\,.\,c\,dy}{\frac{1}{2}ac} = 2\,dx\,dy, \\
\frac{d(\Delta BCD)}{\Delta BCD} &= \frac{b\,dx'\,.\,c\,dy'}{\frac{1}{2}bc} = 2\,dx'\,dy'.
\end{aligned}
\right.
$$

Par introduction des valeurs de 2), de 3) dans 1) et par intégration, on obtient la probabilité pour que sous l'hypothèse $DE > DH$ le plan PQR ne coupe pas la face de base du tétraèdre, savoir

$$
q' = 4 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{ \frac{x'}{1 - \frac{y'}{n}} - \frac{x x'}{(1-y)(1-y')} \right\} dx\,dy\,dx'\,dy',
$$

l'intégration à exécuter d'abord par rapport aux variables x', y', étendue à la face BDE, l'intégration à entreprendre ensuite par rapport aux variables x, y, étendue à toute la surface du triangle ACD. Par les équations des droites BE, AC, lesquelles équations s'énoncent

$$
x' + \frac{y'}{n} = 1, \quad x + y = 1,
$$

se donnent les limites d'intégration, et après introduction de celles-ci, s'ensuit pour la probabilité ci-dessus mentionnée, l'expression suivante indépendante de a, b, c, par conséquent indépendante de la forme du tétraèdre :

$$
\begin{aligned}
q' &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{n} \int_0^{1-\frac{y'}{n}} \left\{ \frac{n x'}{n - y'} - \frac{x x'}{(1-y)(1-y')} \right\} dy\,dx\,dy'\,dx' \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{n} \left\{ 1 - \frac{1-x}{y} y' - \frac{x}{1-y} \frac{\left(1 - \frac{1-x}{y} y'\right)^2}{1-y'} \right\} dy\,dx\,dy' \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \left\{ \frac{y}{1-x} + 2\frac{x(1-x)}{y(1-y)} - \frac{3x}{1-y} + \frac{2x}{1-y} \cdot \frac{(1-x-y)^2}{y^2} l.\frac{1-x-y}{1-x} \right\} dy\,d
\end{aligned}
$$

lorsqu'on introduit dans le cours du calcul pour n la valeur $\frac{y}{1-x}$ résultante de la relation $\frac{DE}{PP} = \frac{AD}{AP}$.

L'évaluation des trois premiers termes se fait sans difficulté. Le quatrième terme s'écrit après transformation

$$2\int_0^1\int_0^{1-y}\frac{1}{y^2}\left\{x(1-y)-2x^2+\frac{x^3}{1-y}\right\}l\,.\,\frac{1-x-y}{1-x}\,dy\,dx;$$

on décompose $l\cdot\frac{1-x-y}{1-x}$ en une différence et on applique aux deux intégrales résultantes, l'intégration par parties, en posant

$$l\,.\,(1-x-y),\ \text{relativement}\ l\,.\,(1-x)=u,$$

$$\left\{x(1-y)-2x^2+\frac{x^3}{1-y}\right\}dx=dv,$$

et on est conduit à des intégrales de fonctions algébriques rationnelles.

On obtient finalement

$$4)\qquad q'=\frac{1}{8}.$$

La même probabilité se donne pour la non-rencontre de la surface de base du tétraèdre sous l'hypothèse $DH > DE$, de manière que la probabilité totale de cet événement égale

$$5)\qquad q=2q'=\frac{1}{4}.$$

De là résulte enfin la probabilité pour que la surface de base du tétraèdre soit coupée ou pour que la section faite soit un quadrilatère, savoir

$$6)\qquad p=1-q=\frac{3}{4}.$$

45. **La surface de probabilité**. — Les problèmes traités jusqu'ici, relatifs à des points pris arbitrairement dans un plan, avaient pour base la supposition de la répartition régulière des points sur le plan. Mais la loi de répartition peut être différente de cette forme la plus simple. Alors, la quantité des points dans un élément du plan ou la probabilité pour qu'un point choisi à volonté tombe dans cet élément est

dépendante non plus de la grandeur seule, mais aussi de la position de l'élément.

On considère, par rapport à un système rectangulaire de coordonnées, l'élément du plan; les points d'angle de l'élément ont les coordonnées (x, y), $(x + dx, y)$, $(x + dx, y + dy)$, $(x, y + dy)$. La probabilité pour qu'un point pris arbitrairement appartienne à cet élément, dépendra et du produit $dx\,dy$, qui exprime la grandeur de l'élément, et aussi de x et de y, et, aura la forme

$$1) \qquad p = \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Si la valeur

$$2) \qquad z = k\varphi(x, y)$$

est dévolue au point (x, y) comme troisième coordonnée rectangulaire au plan des deux premières, l'extrémité de cette coordonnée engendre une surface qui rend percevable géométriquement la marche de la probabilité et peut être nommée la SURFACE DE PROBABILITÉ.

La probabilité pour qu'un point choisi à volonté tombe dans une partie limitée, comme toujours, du plan est mesurée par le volume du cylindre droit reposant sur cette partie, limité par la surface 2), lorsque l'espace total se trouvant entre cette surface et le plan des x, y est pris comme unité.

Les courbes dessinées sur la surface de probabilité, pour les points desquelles la troisième coordonnée z est constante, donnent par leurs projections sur le plan des x, y DES COURBES D'ÉGALE DENSITÉ DE POINTS OU D'ÉGALE PROBABILITÉ; elles sont comparables aux isohypses des surfaces de terrain.

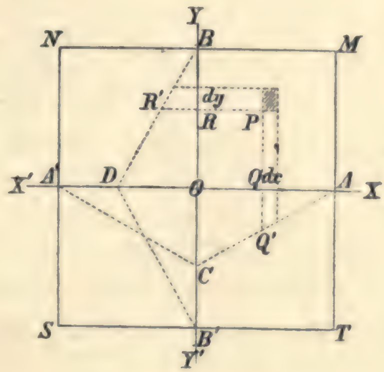
Parmi les courbes d'égale probabilité, celle qui partage en deux parties le plan de manière que les espaces se tenant au-dessus de ces parties sont également grands, peut être désignée comme LA COURBE PROBABLE D'ÉGALE PROBABILITÉ.

46. **Exemple**. — *Les coordonnées rectangulaires* ξ, η *d'un point dans un plan ont été mesurées; à chacun des mesurages peut adhérer une erreur entre les limites* $\pm$ a, *cependant la probabilité d'une valeur d'erreur diminue en proportion de sa*

grandeur. Il faut découvrir la probabilité d'une position du point à déterminer.

Solution. — L'origine O du système des coordonnées dans la figure 24 correspond à la position vraie (inconnue) du point à fixer. La ligne ponctuée ACA' représente la répartition des erreurs dans les abscisses, la ligne BDB' égale à la première la répartition des erreurs dans les ordonnées; de plus $OA = OA' = OB = OB' = a$. Toutes les positions du point dans le carré $MNST$ sont possibles.

Fig. 24.



Nous considérons la position P du point, laquelle provient d'une erreur $x = OQ$ dans l'abscisse et d'une erreur $y = QP$ dans l'ordonnée, ou dit plus exactement : nous considérons les positions se trouvant dans le rectangle haché, de surface $dx\ dy$, lesquelles dérivent des erreurs x à $x + dx$, y à $y + dy$ dans les coordonnées. La probabilité d'une position ainsi réalisée du point, comme celle d'un événement composé, égale

$$1) \quad p = \frac{QQ' \cdot dx}{\Delta\, ACA'} \cdot \frac{RR' \cdot dy}{\Delta\, BDB'} = \frac{(a-x)(a-y)\, dx\, dy}{a^4}.$$

La surface de probabilité

$$2) \qquad z = \frac{(a-x)(a-y)}{a^4},$$

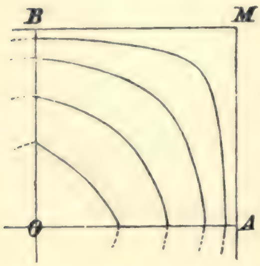
qui correspond à ce cas, d'abord valable pour le quart $OAMB$ du carré, est un paraboloïde hyperbolique; les deux systèmes de ses génératrices sont parallèles respectivement aux plans XOZ, YOZ. Comme (lignes) directrices du premier système, peuvent être envisagées AM et une seconde droite qui se trouve dans le plan YOZ, passe par B et est inclinée à 45° sur les axes; les lignes directrices du second système sont BM et une droite dans le plan XOZ, laquelle droite passe par A et est inclinée de 45° sur les axes. En vertu de la symétrie, pour les trois autres quarts du carré, des rapports analogues sont autorisés, de sorte que la surface totale de probabilité se compose de quatre paraboloïdes hyperboliques qui se coupent dans les plans des x, z et des y, z suivant des lignes droites.

Les courbes d'égale probabilité ont l'équation générale

3) $$(a-x)(a-y)=c^2,$$

sont donc des hyperboles équilatères avec les asymptotes MA, MB dans le premier quart, NB, NA', dans le second, etc. (fig. 25).

Fig. 25.



REMARQUE. — Si les erreurs suivent, dans les abscisses et dans les ordonnées, la loi de Gauss, la probabilité d'une erreur de x à $x + dx$ dans l'abscisse est exprimée par

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx,$$

celle d'une erreur y à $y + dy$ dans l'ordonnée par

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2y^2} dy;$$

puis, la probabilité d'un point dans le rectangle élémentaire (x, y), $(x + dx, y)$, $(x + dx, y + dy)$, $(x, y + dy)$ est

$$p = \frac{hh'}{\pi} e^{-(h^2x^2 + h'^2y^2)} dx\,dy$$

et la surface correspondante de probabilité

$$z = e^{-(h^2x^2 + h'^2y^2)}$$

est une surface transcendante qui s'étend à l'infini et, dans le cas spécial $h = h'$, devient une surface de révolution.

Les courbes d'égale probabilité ont l'équation

$$h^2x^2 + h'^2y^2 = c^2,$$

sont donc des ellipses semblables, concentriques et semblablement placées, appelées ELLIPSES D'ERREURS; dans le cas spécial $h = h'$, elles sont des circonférences concentriques.

3. Points dans l'espace.

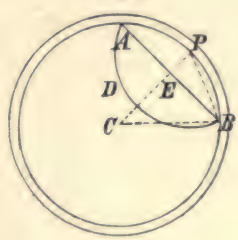
47. **Problème I.** — *Dans une sphère de rayon* r *deux points sont pris arbitrairement; trouver la probabilité pour que leur éloignement réciproque soit plus petit qu'une longueur donnée* c.

Solution. — La quantité de toutes les couples de points dans la sphère est $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2$. Si l'on désigne par g la quantité des cas favorables, on a

$$1)\qquad p = \frac{g}{\frac{16}{9}\pi^2 r^6}.$$

Pour trouver g, nous cherchons le changement dg que ce nombre éprouve lorsque le rayon de la sphère augmente de dr pendant que c demeure invariable. Aux cas favorables antérieurs se joignent ceux chez lesquels un des deux points tombe dans l'enveloppe sphérique infiniment mince dont les rayons sont r et $r + dr$; les cas où les deux points se trouvent dans cette enveloppe sphérique peuvent être négligés puisque leur mesure est d'ordre infiniment petit plus élevé. Si l'un des points est par exemple P (fig. 26), un cas favorable a lieu lorsque l'autre point Q tombe dans l'espace lenticulaire qui est commun à la sphère donnée et à une sphère décrite de P comme centre avec la longueur c comme rayon. Si l'on désigne le volume de cet espace par V, comme P et Q peuvent être permutés, on obtient

Fig. 26.



$$dg = 2 . 4\pi\, r^2\, dr\, .\, V.$$

L'espace lenticulaire se divise en deux segments dont la surface de base commune a le rayon $\frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2}$; l'un segment appartenant à la sphère de rayon r a la hauteur $\frac{c^2}{2r}$, l'autre appartenant à la sphère de rayon c la hauteur $\frac{c\,(2r - c)}{2r}$; avec ces dimensions, on trouve facilement

$$V = \frac{2}{3}\,\pi\, c^3 - \frac{1}{4}\,\pi\,\frac{c^4}{r}$$

et ensuite

$$dg = 8\,\pi^2 \left(\frac{2}{3}\, c^3\, r^2 - \frac{1}{4}\, c^4\, r\right) d\,r.$$

Par intégration, se donne maintenant le g cherché

2) $$g = 8\,\pi^2 \left(\frac{2}{9}\, c^3\, r^3 - \frac{1}{8}\, c^4\, r^2 + C\right),$$

dans lequel, C est la constante d'intégration encore à déterminer. Par substitution de cette valeur de g dans la formule 1), on trouve

$$p = \frac{c^3}{r^3} - \frac{9}{16}\,\frac{c^4}{r^4} + \frac{9}{2}\,\frac{C}{r^6}.$$

La remarque suivante sert à la découverte de C : pour $c = 2r$, toute couple de points pris arbitrairement a un éloignement plus petit que c; dans ce cas, p devient égal à 1; donc

$$1 = 8 - 9 + \frac{9}{2} \cdot 64\,\frac{C}{c^6},$$

d'où résulte

$$\frac{9}{2}\,C = \frac{1}{32}\,c^6.$$

De manière que, finalement,

3) $$p = \frac{c^3}{r^3} - \frac{9}{16}\,\frac{c^4}{r^4} + \frac{1}{32}\,\frac{c^6}{r^6}.$$

Remarque. — La remarque faite par S. Roberts est intéressante, savoir

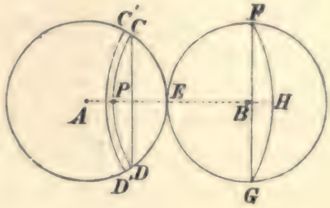
$$p = \frac{2 \text{ segments } ADB + \text{segment } APB}{\text{volume de la sphère } C};$$

une semblable relation s'obtient dans la question analogue dans le plan.

48. **Problème II**. — *Dans chacune de deux sphères égales se touchant un point est pris à volonté; quelle est la probabilité pour que l'éloignement mutuel des deux points soit plus petit que le rayon des sphères?*

Solution. — A, B (fig. 27) sont les centres des sphères données, r leur rayon. L'un des deux points, P, tombe dans un élément de la sphère A, élément qui est découpé dans celle-ci par deux surfaces sphériques, décrites de B avec les rayons x et $x + dx$; si l'on désigne la surface du segment sphérique CPD par u, la probabilité d'une position ainsi réalisée du point P est

Fig. 27.



$$1) \qquad \frac{u\,dx}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Pour découvrir les positions favorables du second point Q, on décrit de P avec le rayon $2r$ une surface sphérique, qui découpe de la sphère B l'espace lenticulaire $FEGHF$; aussi souvent que le point Q tombe dans cet espace, dont le volume peut s'appeler v, il est correspondu aux conditions de la question. La probabilité de cet événement simple est

$$2) \qquad \frac{v}{\frac{4}{3}\pi r^3},$$

par conséquent, la probabilité totale, composée pour que soit $PQ < 2r$ est

$$3) \qquad p = \frac{9}{16\pi^2 r^6}\int_r^{3r} uv\,dx.$$

Maintenant, on trouve facilement

$$u = \frac{\pi}{2r}(4r\,x^2 - 3r^2\,x - x^3),$$

$$v = \frac{1}{12}\pi\left(x^3 - 30r^2 x + 72r^3 - \frac{27r^4}{x}\right);$$

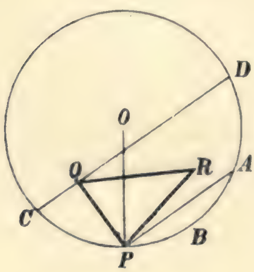
conséquemment, on obtient

$$4)\left\{\begin{aligned} p = \frac{3}{128 r^7}\int_r^{3r} & (81 r^6 - 324 r^5 x + 405 r^4 x^2 - 192 r^3 x^3 + 27 r^2 x^4 \\ & + 4 r x^5 - x^6)\, dx = \frac{13}{35}. \end{aligned}\right.$$

49. **Problème III**. — *Dans une sphère sont pris arbitrairement trois points. Trouver la probabilité pour que les points soient les sommets d'un triangle acutangle.*

Solution. — Comme la probabilité demandée est indépendante du rayon de la sphère, il est permis de prendre le point le plus éloigné du centre de la sphère dans la surface enveloppe de la sphère. Soit P ce point et soient Q, R les deux autres points. Alors il sera à découvrir pour chacun des trois points la probabilité pour que l'angle dont il est le sommet soit un angle OBTU, et comme ces trois événements s'excluent mutuellement, la somme de leurs probabilités donne la probabilité totale pour que le triangle PQR soit un triangle OBTUSANGLE. En outre, il est à reconnaître aussitôt que les points Q, R jouent le même rôle, donc que les probabilités y relatives sont égales.

Fig. 28.



1. Recherche de la probabilité pour que l'angle en P soit un angle OBTU. Nous fixons le second point Q (fig. 28), menons la droite PA normalement à PQ et reconnaissons que l'angle QPR sera obtu lorsque le troisième point R tombera dans le segment PAB; ce qui est à attendre avec la probabilité

$$\frac{\text{volume du segment } PAB}{\text{volume de la sphère}},$$

ou, en posant $OP = r$, $PQ = \varrho$, $\angle OPQ = \theta$, avec la probabilité

$$1)\quad \frac{\frac{1}{3}\pi r^3 (1 - \cos\theta)^2 (2 + \cos\theta)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{4}(1 - \cos\theta)^2 (2 + \cos\theta).$$

L'élément en Q de la surface de cercle, lequel élément correspond aux changements $d\varrho$, $d\theta$ de ϱ, de θ, est $\varrho\, d\theta\, d\varrho$; par conséquent, l'élément de la sphère en Q égale $\varrho\, d\theta\, d\varrho \,.\, 2\pi\varrho \sin\theta$; conséquemment, la probabilité d'une position caractérisée par les arguments ϱ, θ du point Q est

$$2)\quad \frac{2\pi \varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2r^3}\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho.$$

Des deux probabilités simples 1) et 2), résulte la probabilité totale, composée d'un angle obtu en P

$$3)\quad \left\{ \begin{aligned} p_P &= \frac{3}{8r^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta} (1 - \cos\theta)^2 (2 + \cos\theta)\,\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho \\ &= \frac{3}{8r^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta} (2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta)\,\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta)\cos^3\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{3}{70}. \end{aligned} \right.$$

2. Recherche de la probabilité pour que l'angle en Q soit obtu. Avec la position invariable de Q, l'angle PQR sera un angle aigu lorsque le troisième point R tombe dans le segment CDB qui est découpé par le plan CD mené par Q normalement à PQ; ce dernier événement est à attendre avec la probabilité

$$4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\text{volume d. segm. } CDB}{\text{volume de la sphère}} &= \frac{\frac{1}{3}\pi r^3 \left(1 - \cos\theta + \frac{\varrho}{r}\right)^2 \left(2 + \cos\theta - \frac{\varrho}{r}\right)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \cos\theta + \frac{\varrho}{r}\right)^2 \left(2 + \cos\theta - \frac{\varrho}{r}\right) \end{aligned} \right.$$

et comme la probabilité de la position marquée de Q est la même que celle qui a été trouvée tantôt dans l'équation 2), la probabilité totale d'un angle AIGU en Q est

$$1 - p_Q = \frac{3}{8r^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta}\left(1 - \cos\theta + \frac{\varrho}{r}\right)^2\left(2 + \cos\theta - \frac{\varrho}{r}\right)\varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varrho$$

$$= \frac{3}{8r^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta}\left(2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta + 3\frac{\varrho}{r}\sin^2\theta \right.$$
$$\left. + 3\frac{\varrho^2}{r^2}\cos\theta - \frac{\varrho^3}{r^3}\right)\varrho^2\sin\theta\, d\theta\, d\varrho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2 + \frac{3}{2}\cos\theta - \frac{3}{10}\cos^3\theta\right)\cos^3\theta\, d\theta = \frac{53}{70};$$

de là, la probabilité d'un angle OBTU en Q

5) $$p_Q = \frac{17}{70};$$

de même, on a

6) $$p_R = \frac{17}{70}.$$

Par 3), 5) et 6), s'obtient la probabilité pour que le triangle PQR soit OBTUSANGLE

7) $$p = p_P + p_Q + p_R = \frac{37}{70},$$

et par là, la probabilité demandée, pour qu'il soit ACUTANGLE,

8) $$q = 1 - p = \frac{33}{70}.$$

50. **Surfaces d'égale probabilité.** — Comme dans des lignes et dans des surfaces, dans l'espace, la disposition des points peut s'écarter de la répartition jusqu'ici supposée régulière. La probabilité pour qu'un point, saisi à volonté, tombe dans un élément désigné d'espace, dépend alors non seulement de la grandeur, mais aussi de la position de cet élément.

Si l'on rapporte l'espace à un système de coordonnées rectangulaires et considère l'élément parallélipipédique dont les coordonnées d'origine sont x, y, z et dont les dimensions sont dx, dy, dz, la probabilité d'un point de cet élément apparaît sous la forme

1) $$p = \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

et la fonction

2) $$u = k\varphi(x, y, z)$$

est proportionnelle à la compacité, à la densité des points dans l'élément considéré. Interprète-t-on le mot densité dans le sens que lui attribue la physique, en se représentant l'espace empli de matière? La probabilité d'un point dans une partie limitée, d'une manière quelconque, de l'espace, peut être marquée comme le rapport de la masse dans cette partie d'espace à la masse dans l'espace, totale, venant en considération.

Soit u = constante = ck, il vient

3) $$\varphi(x, y, z) = c;$$

cette équation représente une surface dans laquelle règne une égale densité des points ou une SURFACE D'ÉGALE PROBABILITÉ, parce qu'un point pris à volonté peut appartenir avec égale probabilité à des éléments d'espace également grands se joignant dans une telle surface.

51. **Exemple.** — *Les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace ont été mesurées; à chacun de ces mesurages peut adhérer une erreur entre les limites* $\pm$ a, *cependant la probabilité d'une valeur d'erreur diminue proportionnellement à sa grandeur. Découvrir la probabilité d'une position du point à déterminer.*

Solution. — L'origine du système de coordonnées, pris pour base de la considération suivante, est la position vraie (inconnue) du point à fixer.

Nous considérons une position P ou mieux les positions voisines de ce point qui naissent de certaines erreurs dans les coordonnées, quelles erreurs se trouvent respectivement entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$. Les probabilités simples des erreurs dénommées sont (comp. au n° 46)

$$\frac{a-x}{a^2}\,dx, \quad \frac{a-y}{a^2}\,dy, \quad \frac{a-z}{a^2}\,dz,$$

la probabilité de leur rencontre ou d'une position du point de la modalité décrite est

$$1) \qquad p = \frac{(a-x)(a-y)(a-z)}{a^6}\,dx\,dy\,dz.$$

L'équation générale des surfaces d'égale probabilité s'énonce

$$2) \qquad (a-x)(a-y)(a-z) = c^3.$$

Toutes les positions possibles du point remplissent un cube de côté $2a$ et de centre O; les surfaces d'égale probabilité sont disposées symétriquement dans les octants de ce cube et les huit surfaces qui ressortissent à la même valeur numérique de c, sont liées l'une à l'autre dans les plans $y\,z$; $z\,x$; $x\,y$ le long d'hyperboles équilatères.

Remarque. — Les erreurs dans les coordonnées suivent-elles la loi des erreurs de Gauss? Alors, pour un point dont les coordonnées reçoivent des erreurs entre les limites x et $x+dx$, y et $y+dy$, z et $z+dz$, la probabilité s'écrit

$$p = \frac{h\,h'h''}{\sqrt{\pi^3}}\,e^{-(h^2x^2+h'^2y^2+h''^2z^2)}\,dx\,dy\,dz.$$

Les surfaces d'égale probabilité ont l'équation générale

$$h^2x^2 + h'^2y^2 + h''^2z^2 = c^2,$$

sont donc des ellipsoïdes concentriques, semblables, de position semblable; on pourrait les appeler, analogiquement aux ellipses d'erreurs dans le plan, ellipsoïdes d'erreurs. Lorsque deux des constantes sont égales à h, ce sont des ellipsoïdes de révolution, et, pour le cas $h = h' = h''$, des surfaces sphériques.

DEUXIÈME CHAPITRE.

Droite menée arbitrairement.

1. Droite dans le plan.

52. Une droite est à désigner comme menée arbitrairement, dans le sens le plus étendu du mot, lorsque les conditions données auxquelles elle a à satisfaire ne suffisent pas à sa détermination.

Pour les droites dans un plan, trois cas principaux peuvent être différenciés.

1. Un plan est donné et dans celui-ci un point; par le point est à mener, dans le plan, une droite. La DIRECTION de la droite est indéterminée, peut donc être prise à volonté (droite de direction quelconque).

2. Un plan est donné et dans celui-ci une direction; dans le plan, une droite de la direction donnée doit être menée. La POSITION de la droite n'est pas déterminée, peut donc être prise arbitrairement (droite quelconque de direction donnée).

3. Un plan est donné; une droite doit être tracée dans celui-ci. Position et direction sont indéterminées, donc l'une et l'autre sont à prendre à volonté (droite menée arbitrairement).

Dans les deux premiers cas, l'arbitraire est limité; dans le troisième cas, illimité.

Sous le premier cas, il faudrait aussi placer la question suivante : dans un plan donné, un point est à prendre arbitrairement, et par celui-ci, une droite est à tracer. Si ici tout d'abord la direction et la position sont indéterminées, cependant seule la direction est quelconque; car aussitôt que le point est pris — et cela précède le tracé de la droite — il subsiste seulement pour la droite un arbitraire limité.

Par contre, une droite, née par la jonction de deux points pris arbitrairement, ne peut pas valoir dans le sens susdit pour une droite menée arbitrairement; l'arbitraire complet adhère ici aux deux points, et dès que ceux-ci sont pris, la droite est déterminée.

53. **Théorème I**. — *Le nombre des droites (rayons) qui peuvent être menées par un point donné entre deux droites (rayons) fixes, données, est mesuré par l'angle de ces droites (rayons).*

Les fondements de cela se trouvent dans les propositions générales qui ont été développées au n° 3 de l'introduction.

On établit l'équation des droites sous la forme

$$x \cos\theta + y \sin\theta = 0$$

ou

$$y = \tang\theta \,.\, x,$$

pendant qu'on choisit comme origine le point donné. Ainsi, les valeurs de θ, qui correspondent aux droites menées par ce point, forment une variété continue, simplement étendue, dont le contenu, lorsque θ_1, θ_2 se rapportent aux deux droites fixes, égale

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \theta_2 - \theta_1;$$

cela est l'angle des deux droites fixes.

Ce mode de mesurage naît de la représentation suivante : la totalité des droites tracées par un point donné est composée d'un faisceau de droites, dans lequel les droites se suivant l'une l'autre, enserrent entre elles des angles égaux, diminuant à l'infini.

De la proposition énoncée ci-dessus, il résulte que le nombre des droites tracées par un point donné est mesuré par π, la quantité des rayons par 2π.

54. **Théorème II**. — *Le nombre des droites qui, dans une direction donnée, peuvent être menées entre deux positions limites, données, est mesuré par la distance des positions limites.*

C'est-à-dire que si l'on écrit l'équation des droites sous la forme

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p,$$

dans laquelle θ correspond à la direction donnée, les valeurs de p échéant aux droites mentionnées forment une variété concrète, simplement étendue, dont le contenu, lorsque p_1, p_2 se rapportent aux positions limites, égale

$$\int_{p}^{p_2} dp = p_2 - p_1;$$

cela est la distance des positions limites.

On a à se représenter la totalité des droites de direction donnée comme engendrée par un système de parallèles dans lequel les droites se suivant l'une l'autre se trouvent être à des distances égales, décroissant à l'infini.

Les deux totalités de droites, qui ont été traitées jusqu'ici, peuvent être conçues aussi sous un point de vue commun.

La totalité des droites de la première espèce découpe sur une circonférence décrite du point donné comme centre et avec un rayon quelconque une totalité régulière de points; de même, la totalité des droites de la seconde espèce donne avec une droite normale à leur direction (ainsi qu'avec toute autre droite) une série régulière de points: l'adoption arbitraire d'une droite s'accorde donc avec l'adoption arbitraire d'un point dans cette circonférence, relativement dans la transversale; conséquemment, la totalité des droites peut être mesurée par la totalité des points correspondants; on est ainsi ramené aux propositions établies.

55. La notion d'une droite menée arbitrairement dans un plan se compose de la notion d'une droite de direction quelconque et de la notion d'une droite quelconque de direction donnée.

On a à se représenter la totalité des droites de la troisième espèce comme engendrée par un réseau de droites, qui consiste en systèmes superposables, congruents de parallèles équidistantes: ces systèmes sont parallèles aux droites d'un faisceau isogonal de droites pendant que la distance mutuelle des droites dans les systèmes de parallèles, ainsi que la distance angulaire des droites du faisceau, décroissent à l'infini.

Un autre mode de formation de ce réseau de lignes résulte de l'exposition suivante : on écrit l'équation des droites sous la forme

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p;$$

les combinaisons des valeurs de θ et de p, qui correspondent aux droites du plan, forment une variété continue, doublement étendue. Si l'on fait θ constant et donne à p des valeurs qui forment une série arithmétique, on est conduit à un système de parallèles équidistantes; si l'on donne au contraire, avec p constant, à θ, dans le même mode, des valeurs progressives, on obtient une série de tangentes à une circonférence qui, de l'origine comme centre, est décrite avec le rayon p; les points de contact sont répartis régulièrement sur le périmètre. On recueille donc les droites correspondantes aux combinaisons des valeurs de θ et de p, en décrivant du sommet d'un faisceau isogonal de droites, une série de circonférences équidistantes et en menant à celles-ci des tangentes en tous les points où elles sont rencontrées par les droites du faisceau.

Nous nous occuperons ultérieurement du mesurage des totalités de la troisième espèce.

56. **Problème I.** — *Combien grande est la probabilité pour qu'une droite menée à volonté par un point donné, ou pris arbitrairement, enserre, avec une droite fixe, un angle se trouvant entre les limites θ et $\theta + d\theta$, ou abréviativement, l'angle θ?*

Solution. — La probabilité demandée est $\frac{d\theta}{\pi}$.

57. **Problème II.** — *Quelle est la probabilité pour qu'un rayon tiré d'un point donné ou d'un point pris à volonté, forme avec un rayon fixe, l'angle θ?*

Solution. — La probabilité requise est $\frac{d\theta}{2\pi}$.

58. **Problème III.** — *Combien grande est la probabilité pour qu'une droite menée arbitrairement dans une direction donnée soit à la distance* x *de l'une des positions limites, lorsque* a *est la distance des deux positions limites?*

Solution. — La probabilité cherchée est $\frac{dx}{\mathrm{a}}$.

59. **Problème IV**. — *Dans une hyperbole dont l'angle des asymptotes est α (en mesure d'arc), un diamètre est mené arbitrairement. Trouver la probabilité pour qu'il donne avec l'hyperbole des points d'intersection réels.*

Solution. — Comme de réels points d'intersection n'arrivent que lorsque le diamètre tombe à l'intérieur de l'angle des asymptotes, la probabilité requise est

$$p = \frac{\alpha}{\pi};$$

pour l'hyperbole équilatère, $p = \frac{1}{2}$.

60. **Problème V**. — *Dans le plan d'une hyperbole dont l'angle des asymptotes est α, une droite est menée à volonté. Trouver la probabilité pour qu'il y ait des tangentes à l'hyperbole parallèles à cette droite.*

Solution. — Si l'on trace le diamètre, parallèle à la droite menée, à la conjoncture de la question, il ne pourra être correspondu que quand ce diamètre tombe dans le supplément de l'angle des asymptotes, de manière que

$$p = \frac{\pi - \alpha}{\pi} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}.$$

61. **Problème VI**. — *Par le centre d'un rectangle de longueur* a *et de largeur* b, *une droite est menée arbitrairement; combien grande est la probabilité pour qu'elle coupe les côtés de longueur, les côtés de largeur du rectangle?*

Solution. — On trouve facilement

$$p_1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b},$$

$$p_2 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a};$$

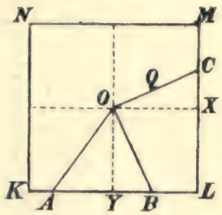
d'où, par suite de $p_1 + p_2 = 1$, résulte la formule cyclométrique, connue

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b} + \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

62. **Problème VII**. — *Du centre d'un carré, trois rayons sont tirés; le premier est mené dans une direction arbitraire, le second à un point quelconque du périmètre, le troisième par un point quelconque de la surface; tous les trois sont arrêtés au périmètre du carré. Trouver la probabilité pour que le premier, le second, le troisième soit le plus long d'entre eux.*

Solution. = Soit $KLMN$ (fig. 29) le carré; O son centre; OA le premier rayon mené à volonté; OB le deuxième mené au point B pris arbitrairement dans le périmètre; enfin, OC le troisième tiré par le point Q marqué à volonté dans la surface. On construit OX, OY parallèlement aux côtés du carré; on choisit LX pour unité et on désigne l'angle YOA par θ.

Fig. 29.



La probabilité pour que le rayon OA enserre, avec l'un des axes, l'angle θ, est

$$8 \cdot \frac{d\theta}{2\pi};$$

la probabilité pour que le rayon OB soit plus court que OA, ou pour que la longueur YB soit plus petite que la longueur YA, est

$$8 \cdot \frac{AY}{\text{périmètre du carré}} = tang\ \theta;$$

la probabilité pour que le rayon OC soit plus petit que le rayon OA, ou pour que le triangle OXC tout au plus soit égal au triangle OAY, est

$$8 \cdot \frac{\Delta\ OAY}{\text{surface du carré}} = tang\ \theta;$$

de là, se livre la probabilité totale, composée pour que le rayon OA soit le plus grand,

$$1) \qquad p_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} tang^2\ \theta \,.\, d\theta = \frac{4}{\pi} - 1.$$

Par de semblables considérations, on trouve, avec $YB = y$, la probabilité pour que le rayon OB soit le plus grand,

$$2) \qquad p_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^1 y \, arc \, tang \, y \, dy = 1 - \frac{2}{\pi}$$

et, avec $XC = x$, la probabilité pour que le rayon OC soit le plus grand,

$$3) \qquad p_3 = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x \, arc \, tang \, x \, dx = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Nécessairement, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

63. **Problème VIII.** — *Découvrir la probabilité pour que, dans le plan, la résultante de deux forces arbitraires en direction et en grandeur soit la plus grande, la plus petite, la moyenne des trois forces.*

Solution. — On désigne les composantes par x, y; l'angle qu'elles enserrent par θ, et la résultante par z; ainsi, l'on a

$$1) \qquad z^2 = x^2 + y^2 + 2\,xy \cos \theta.$$

Il suffit de limiter les valeurs de θ à l'intervalle 0 à $\frac{\pi}{2}$ et celles de x et de y à un intervalle fini 0 à a.

1. z est, parmi les trois forces, absolument la plus grande, aussi longtemps que l'angle θ est aigu; la probabilité de cela s'élève à $\frac{1}{2}$.

Aussi ensuite, lorsque θ franchit la quotité $\frac{1}{2}\pi$, z peut être la plus grande. Si l'on pose $\theta = \frac{1}{2}\pi + \varphi$, z^2 s'écrit sous la forme

$$z^2 = y^2 + x\,(x - 2\,y \sin \varphi)$$

et cela est $x < y < z$, lorsque $x > 2y \sin \varphi$; de plus, puisque y est la valeur la plus élevée de x, $\sin \varphi$ doit être au plus $\frac{1}{2}$; donc φ, au plus $\frac{1}{6}\pi$. Comme la même probabilité est valable aussi pour $y < x < z$, la probabilité totale pour que la résultante soit la plus grande des trois forces est

$$2)\qquad p_1 = \frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{6}\pi}\frac{d\varphi}{\pi}\int_0^{a}\frac{dy}{a}\int_{2y\sin\varphi}^{y}\frac{dx}{a} = \frac{2}{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{\pi}.$$

2. De $z^2 = x^2 + y\,(y - 2x\sin\varphi)$, il résulte que $z < x < y$, lorsque $y < 2x\sin\varphi$; et comme x est la plus petite valeur de y, $\sin\varphi$ doit être tout au moins $\frac{1}{2}$, ou φ tout au moins $\frac{1}{6}\pi$.

Donc, la probabilité pour que la résultante soit la plus petite des trois forces, ou pour que devienne $z < x < y$, ou $z < y < x$, est

$$3)\qquad p_2 = 2\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\pi}\int_0^{a}\frac{dx}{a}\int_x^{2x\sin\varphi}\frac{dy}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}.$$

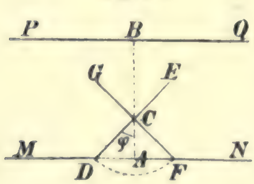
3. Enfin, la probabilité pour que la résultante soit la moyenne des trois forces, s'en ensuit

$$4)\qquad p_3 = 1 - p_1 - p_2 = \frac{2}{3} - \frac{2\,(\sqrt{3}-1)}{\pi}.$$

64. **Problème IX.** — (PROBLÈME DE L'AIGUILLE DE BUFFON)[1]. *Un plan est divisé en bandes par des droites parallèles, équidistantes; une aiguille cylindrique, fort mince, dont la longueur est au plus égale à la distance des parallèles, est projetée arbitrairement sur ce plan. Combien grande est la probabilité pour que l'aiguille rencontre une des lignes de division?*

Solution. — Soient MN, PQ (fig. 30) deux lignes de division voisines, quelconques; leur distance, $AB = a$. Admettons que le point milieu de l'aiguille tombe en C, de manière que l'éloignement de C de MN, c'est-à-dire AC, soit x; la probabilité y relative est $\frac{dx}{a}$. On décrit

Fig. 30.



[1] BUFFON dit : „ Je suppose que dans une chambre dont le parquet est „ simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, „ et que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des

de C avec la demi-longueur r de l'aiguille l'arc de cercle DF; on dessine les positions DCE, FCG, de l'aiguille; la ligne de division MN est atteinte par celle-ci lorsqu'elle tombe dans l'angle $DCF = 2\varphi$; la probabilité y relative est $\frac{2\varphi}{\pi}$.

Il en résulte la probabilité totale, composée pour que la ligne MN soit rencontrée par l'aiguille, pendant que son point milieu tombe au-dessus de MN,

$$\frac{2}{\pi a}\int_0^r \varphi\, dx = \frac{2}{\pi a}\int_0^r arc\cos\frac{x}{r}\, dx = \frac{2r}{\pi a};$$

la même valeur se livre sous la supposition que le point milieu de l'aiguille vienne à se trouver au-dessous de MN. La probabilité requise est par conséquent

$$p = \frac{4r}{\pi a}. \text{ (1)}$$

65. **Notice historique**. — Le présent problème est l'un des premiers, posé et résolu dans le domaine de la probabilité géométrique. Il est remarquable que Buffon, dont la sphère de recherches était éloigné cependant des sciences mathématiques, fut celui qui parcourut la voie juste de la résolution d'une question fort étrangère aux objets de cette sphère, et, par cela, donna naissance à une nouvelle branche du calcul des probabilités.

Il commence le XXIIIe article de son " Essai d'arithmétique morale „ (2) par les mots : " L'analyse est le seul instrument „ dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des „ probabilités pour déterminer et fixer les rapports du hasard: „ la géométrie paraissait peu propre à un ouvrage si délié;

„ parallèles du parquet, et que l'autre au contraire parie que la baguette „ croisera quelques-unes de ces parallèles; on demande le sort de ces deux „ joueurs (on peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou „ une épingle sans tête). „ Œuvres complètes de Buffon, édition Duménil, tome quatrième, p. 277.

(1) Voir une seconde solution, en même temps une généralisation, de ce problème au n° 82.

(2) Buffon's sämtliche Werke, deutsch von B. Rave. 1840, 4. Bd., pag. 441 — 498. — Le traducteur a repris le texte français original, dans les " Œuvres complètes de Buffon „, édition Duménil, tome IV, p. 275.

„ cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnaître que cet avantage de l'analyse sur la géométrie est „ tout à fait accidentel, et que le hasard, selon qu'il est modifié „ et conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi „ bien que de celui de l'analyse.... Pour mettre donc la „ géométrie en possession de ses droits sur la science du „ hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent sur „ l'étendue et sur ses rapports, ou calculer le petit nombre de „ ceux de cette nature qui sont déjà trouvés. „ Il aborde ensuite la solution de quelques questions sur le jeu du " franc-carreau „ qui consiste en ceci : on jette, sur un plancher parqueté de carreaux égaux, réguliers, une monnaie et on parie qu'aucun joint (franc-carreau) ne sera couvert ou qu'un, deux, trois... joints seront couverts. Le principe appliqué à la solution est juste, la démarcation des cas favorables et des cas défavorables, cependant, n'est pas toujours exécutée correctement [1].

Buffon remarque plus loin que " le problème demanderait un peu plus de géométrie „, si la pièce jetée possédait une autre forme que " la forme ronde „; puis il passe au problème de l'aiguille, qu'il résout d'une manière complètement correcte avec l'aide du calcul intégral. Mais il traite fautivement le cas du plan revêtu non plus d'un système mais de deux systèmes de parallèles équidistantes, qui le découpent en carrés égaux. (Comparer à la remarque du n° 68).

Abstraction faite des exemples simples sur le jeu du " franc-carreau „, au sujet desquels Buffon déjà en 1733 avait fait à l'Académie une brève communication (voir l'Histoire de l'Académie de France pour 1733, pages 43 à 45), la rédaction de l'" Essai d'arithmétique morale „, d'aprés l'" Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours „, de Gourand (Paris, 1848), serait à porter à l'année 1760 [2],

---

[1] En outre, quelques-uns des résultats sont altérés par des erreurs d'impression.

[2] Comparer à " A History of the mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace „ from J. Todhunter (Cambridge and London, Macmillan, 1865), pag. 344.

qui, donc, serait à désigner pour l'époque de la fondation de la théorie des probabilités géométriques.

De 1760 à 1812, rien sur cet objet n'est à enregistrer. Dans sa " Théorie analytique des probabilités „ publiée dans l'année énoncée en dernier lieu, LAPLACE traite de nouveau dans les pages 359 à 362 le problème de l'aiguille de BUFFON, et un cas plus difficile, à savoir le cas où le plan est divisé en une suite de champs rectangulaires égaux, sans cependant mentionner l'origine de ces problèmes (1). Ceux-ci forment dans la grande œuvre de LAPLACE la terminaison du Ve chapitre, " Application du calcul des probabilités à la recherche des phénomènes et de leurs causes. „ Après avoir parlé de l'application du calcul des probabilités à l'astronomie, à la physiologie, à la médecine, à l'économie politique, à l'influence des causes morales, à l'examen des jeux de hasard, dans les cas dont la complication ne permet pas un traitement direct et auxquels des observations en grand nombre doivent venir en aide, le passage au problème considéré est ménagé par les mots : " Enfin, on pourrait faire usage du calcul des probabi-
„ lités pour rectifier les courbes ou carrer leurs surfaces.
„ Sans doute les géomètres n'emploieront pas ce moyen;
„ mais, comme il me donne lieu de parler d'un genre particu-
„ lier de combinaisons du hasard, je vais l'exposer en peu de
„ mots. „ L'insertion des questions dans le système est particulière et se fait en une place où l'on ne doit pas la présumer.

Depuis quelque trente ans, le nouveau domaine du calcul des probabilités est cultivé avec prédilection notamment par des mathématiciens anglais et français; les problèmes extrêmement nombreux qui ont été publiés spécialement dans des revues périodiques anglaises et dont les solutions ont donné, d'une manière répétée, l'occasion d'un échange de pensées intéressantes sur les fondements du nouvel objet, en rendent témoignage.

Deux travaux sur le calcul intégral, à savoir " A treatrise

(1) Ensuite de cela, LAPLACE, fréquemment, est désigné comme le créateur du problème de l'aiguille.

on the integral Calculus etc. „ (Cambridge and London, Macmillan, IIe édition, 1862), de J. Todhunter et “ An elementary Treatise on the Integral Calculus, etc. „ (London, Longmans, IIIe édition, 1880), de B. Williamson, ont consacré à la probabilité géométrique et aux moyennes géométriques un chapitre spécial; dans le dernier travail, ce chapitre a pour auteur Crofton.

66. Remarque. — Le problème de l'aiguille de Buffon présente un intérêt étendu par le fait que c'est l'un des peu nombreux problèmes sur la probabilité géométrique, qui furent confirmés par la voie expérimentale.

La difficulté principale, dans l'exécution de pareilles tentatives, réside dans l'exigence d'établir les expériences de façon qu'il soit tenu compte de la notion de l'arbitraire. Des points sont pris à volonté sur une surface plane, limitée d'une manière quelconque; plus grand devient leur nombre, plus régulièrement devrait s'égrener leur distribution. Mais on trouvera la compacité des points diminuée vers le contour de la figure, et cela, par le motif que l'exigence de devoir prendre les points à l'intérieur de la figure a par suite, en quelque sorte, un éloignement forcé de la limite, et par conséquent une compacité de points moins élevée à proximité de cette limite. Pour obvier à cette influence, on doit prendre les points sans avoir égard au périmètre de la figure, dans le plan agrandi, et laisser hors d'estimation tous les points tombés à l'extérieur de la figure. Des remarques semblables sont valables pour la prise de points dans des lignes, dans l'espace.

Semblablement, lors de prise de lignes droites dans un plan, une précaution spéciale doit être employée à ce que toutes les directions, éventuellement toutes les positions, puissent se présenter avec égale facilité, à ce qu'aucune tendance à la réalisation plus fréquente de ces directions-ci ou de ces directions-là, ou de ces positions-ci ou de ces positions-là, n'existe.

Le professeur Dr R. Wolf, de Zurich, qui a produit il y a des années de nombreuses séries d'épreuves pour l'affermissement de la loi des grands nombres, étendit ses observations au problème de l'aiguille de Buffon, qu'il avait appris par

“ Un million de faits „ (Paris, 3e édit., 1843), de L. Lalanne, cependant sans la preuve du résultat(1). Sur une table d'un pied carré, une série de parallèles à la distance réciproque de 45 mm. avait été tracée, et, un fragment de 36 mm. de longueur avait été découpé d'une aiguille à tricoter. Des trois séries d'épreuves, effectuées, la troisième seule a un intérêt ici; 50 fois 100 jets furent faits, et pour tenir compte de la “ direction arbitraire „ de l'aiguille, la table reçut une rotation continue. Sur les 100 jets de chacune des 50 suites d'épreuves, le nombre des cas où les parallèles furent atteintes fut :

41 fois	dans	1 suite,	53 fois	dans	2 suites,
42 „	„	3 suites,	54 „	„	1 suite,
43 „	„	2 suites,	55 „	„	1 suite,
45 „	„	7 suites,	56 „	„	2 suites,
46 „	„	2 suites,	57 „	„	1 suite,
47 „	„	1 suite,	58 „	„	1 suite,
48 „	„	3 suites,	59 „	„	1 suite,
49 „	„	2 suites,	60 „	„	2 suites,
50 „	„	3 suites,	61 „	„	1 suite,
51 „	„	8 suites,	62 „	„	2 suites,
52 „	„	3 suites,	63 „	„	1 suite.

2532 fois dans 50 suites; 50 × 100 jets.

Le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des jets est

$$p' = \frac{2532}{5000} = 0{,}5064;$$

pendant que la formule théorique pour $2r = 36$ et $a = 45$ donne

$$p = 0{,}5093.$$

La concordance de l'expérience avec la théorie peut donc être dite fort satisfaisante; la différence des deux résultats ne s'élève qu'à 0,0029.

Wolf a soumis, selon la méthode des moindres carrés, les nombres de la première rangée verticale à une compensation, en les considérant comme les résultats de 50 observations

(1) Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1850, pages 85 à 88.

également exactes; suivant ce calcul (voir le " Handbuch der Mathem., Phys., etc., de Wolf, tome Ir, page 277), pour 100 jets, le nombre le plus probable des cas où les parallèles sont atteintes s'obtient égal à 50,64, avec l'erreur moyenne $\pm$ 0,84; ensuite de quoi, le rapport des épreuves favorables au nombre de toutes les épreuves se déplace entre les limites moyennes 0,5064 $\pm$ 0,0084, entre lesquelles la valeur théorique est comprise effectivement.

Comme Lalanne a fait la remarque qu'on peut parvenir par des épreuves du mode décrit à une détermination d'autant plus exacte du nombre π qu'on rend la série des épreuves plus grande, Wolf utilisa aussi les résultats de ses épreuves pour ce calcul. De la formule théorique, résulte

$$\pi = \frac{4r}{a} \cdot \frac{1}{p};$$

on établit ici pour p la valeur déduite de l'observation, $p' = 0{,}564$, et on calcule, avec l'erreur moyenne de celle-ci, $\mu = \pm 0{,}0084$, l'erreur moyenne de la fonction susdite; ainsi s'obtient

$$\pi' = \frac{4r}{a} \cdot \frac{1}{p'} \pm \frac{4r}{a} \cdot \frac{1}{p'^2} \cdot \mu = 3{,}1596 \pm 0{,}0524;$$

aussi ici la valeur théorique de π tombe entre ces limites fournies par l'expérience.

Les expériences de Wolf donnent encore l'occasion de dire comment l'expérimentation est à disposer, pour prévoir à priori, avec un nombre donné d'épreuves, le meilleur accord avec la théorie. Lalanne affirme : " L'erreur sera la plus petite possible pour un nombre donné d'épreuves lorsque la longueur a de l'aiguille est égale au quart du produit de l'intervalle d des divisions par le rapport π „. Donc, lorsque $a = \frac{2\pi r}{4}$, et correspondamment à cette déclaration, Wolf avait réglé les dimensions du matériel de ses expériences.

Dans un supplément [1] au travail cité antérieurement, supplément présentant un intérêt particulier parce qu'il com-

[1] Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1850, pag. 210 — 212.

munique une solution théorique, donnée par le professeur bâlois RUD. MERIAN, du problème de l'aiguille, WOLF dit : « MERIAN conteste la justesse de la déclaration de LALANNE et pose en principe que le plus grand accord entre l'expérience et la théorie doit se donner lorsque $a = 2r$, c'est-à-dire lorsque la distance des parallèles est rendue égale à la longueur de l'aiguille. » WOLF combat cette opinion, défend l'affirmation de LALANNE et produit, suivant la règle de MERIAN, une nouvelle série de 50×100 épreuves qui fournissent un résultat moins favorable.

Mais effectivement l'assertion de MERIAN est juste. Car si p indique la probabilité à priori d'un événement, si parmi s épreuves organisées, m sont favorables à cet événement, on peut espérer, selon le théorème de BERNOUILLI, avec la probabilité

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s p (1-p)}},$$

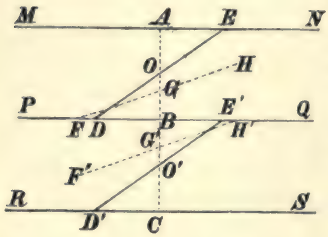
que la différence $p - \frac{m}{s}$ sera renfermée entre les limites $\pm \gamma \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}$. Maintenant, ces limites atteignent avec une valeur donnée de γ (ou de Π) et de s, l'étendue LA PLUS GRANDE pour $p = \frac{1}{2}$, donc pour $a = \frac{2\pi r}{4}$; la règle de LALANNE est par conséquent complètement renversée; au contraire, elles gagnent réellement l'étendue LA PLUS RESSERRÉE lorsque p reçoit la plus grande valeur compatible avec les conditions de la question, c'est-à-dire pour $a = 2r$ ou pour $p = \frac{2}{\pi}$. Que la deuxième série d'épreuves de WOLF ait donné un accord moins bon s'explique par le nombre médiocre des épreuves.

67. **Problème X.** — *Résoudre le précédent problème sous la condition que la longueur de l'aiguille est plus grande que la distance des parallèles.*

Solution. — Soient MN, PQ, RS (fig. 31, p. 92) trois lignes de division se suivant l'une l'autre; on mène à celles-ci la normale ABC; il suffit manifestement de limiter la recherche au cas dans lequel le point milieu de l'aiguille tombe sur l'étendue OO' qui joint les milieux de AB et de BC.

Par des arcs de circonférence, des points O et O' comme centres, avec la demi-longueur r de l'aiguille comme rayon, on coupe les parallèles aux points D, E, D', E', et on mène DOE, $D'O'E'$; on reconnaît facilement qu'aussi longtemps que l'angle d'inclinaison de l'aiguille sur la normale est plus petit que l'angle $BOD = \alpha$, PQ est rencontré par l'aiguille, quel que soit le point de l'étendue OO' où son point milieu tombe. D'autre part, si l'angle d'inclinaison mentionné est plus grand que α, comme par exemple dans la position FH et dans la position $F'H'$, qui lui est parallèle, la parallèle PQ est rencontrée par l'aiguille seulement lorsque son point milieu tombe dans l'étendue GG'.

Fig. 31.



Conséquemment, si l'on désigne l'angle que l'aiguille dans une position quelconque enserre avec la normale, par φ, la probabilité pour que la parallèle PQ soit rencontrée est exprimée par

$$p = \int_0^{\alpha} \frac{2d\varphi}{\pi} + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\varphi}{\pi} \cdot \frac{2r\cos\varphi}{a} = \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4r}{\pi a}(1 - \sin\alpha).$$

En éliminant α de cette formule, elle devient

$$p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{2r} + \frac{2}{\pi a}(2r - \sqrt{4r^2 - a^2}).$$

Ainsi, on obtient pour $r = a$, ou lorsque l'aiguille est deux fois plus longue que la distance des parallèles,

$$p = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}(2 - \sqrt{3}) = 0{,}8374\ldots$$

Avec r croissant, la valeur de p s'approche de l'unité.

68. **Problème XI**. — *Un plan est divisé par deux systèmes de droites parallèles, équidistantes en rectangles égaux; une*

aiguille plus courte que chacune des deux distances des parallèles des deux systèmes est projetée arbitrairement sur le plan; combien grande est la probabilité pour qu'elle rencontre les lignes de division?

Première solution ([1]). — On désigne par $p^{(1)}$ la probabilité pour que SEULEMENT une ligne du Ir système soit rencontrée; par $p^{(2)}$ la probabilité pour que SEULEMENT une ligne du IIe système soit rencontrée; par $p_{1,2}$ la probabilité pour que l'aiguille coupe en même temps des lignes des deux systèmes. La probabilité requise est

1) $$p = p^{(1)} + p^{(2)} + p_{1,2}.$$

Puis, p_1 est la probabilité pour que l'aiguille rencontre EN GÉNÉRAL une ligne de I, et p_2 la probabilité pour que l'aiguille rencontre EN GÉNÉRAL une ligne de II. Les valeurs de ces probabilités sont connues par le problème IX, nº 64, à savoir

2) $$p_1 = \frac{4r}{\pi a}, \quad p_2 = \frac{4r}{\pi b};$$

ainsi existent les relations

$$p_1 = p^{(1)} + p_{1,2}, \quad p_2 = p^{(2)} + p_{1,2},$$

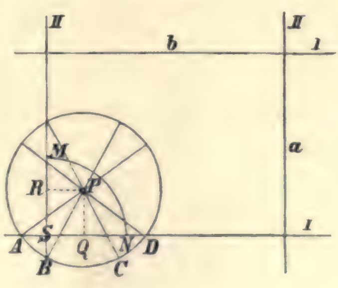
par lesquelles, l'équation 1) se transforme en

3) $$p = p_1 + p_2 - p_{1,2}.$$

Il ne reste donc plus qu'à découvrir la valeur de $p_{1,2}$.

La figure 32 représente un des rectangles. L'aiguille, pendant que son point milieu tombe dans ce rectangle, pourra rencontrer simultanément les côtés contigus en S de celui-ci seulement lorsque le point milieu vient à se trouver à l'intérieur du quart de cercle SMN décrit de S comme centre avec r, la demi-longueur de l'aiguille, comme rayon. Si le point milieu tombe par exemple au point P, dont les coordonnées sont $SQ = PR = x$ et $PQ = y$, et si l'on

Fig. 32.



([1]) Comparer à la " Théorie anal. des prob. " de LAPLACE. p. 360 à p. 362.

décrit, de P comme centre, avec le rayon r, un cercle, il est à reconnaître facilement qu'un cas favorable se présentera lorsque l'aiguille tombe dans un des angles APB ou CPD. La probabilité de cela est

$$2\,\frac{arc\cos\frac{y}{r} - arc\sin\frac{x}{r}}{\pi};$$

la probabilité de la position prise du point milieu, $\frac{dx\,dy}{ab}$.

En intégrant le produit de ces probabilités simples pour le domaine de valeurs limité par le quart de cercle SMN et quadruplant l'intégrale, parce que le calcul pour chacun des quatre angles du rectangle considéré fournit la même valeur, il vient

$$4)\quad \begin{cases} p_{1,2} = \dfrac{8}{\pi ab}\displaystyle\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\left(arc\cos\frac{y}{r} - arc\sin\frac{x}{r}\right)dx\,dy \\[2ex] \quad = \dfrac{8}{\pi ab}\displaystyle\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}\,arc\cos\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} - x + r - \sqrt{r^2-x^2}\,arc\sin\frac{x}{r}\right)dx \\[2ex] \quad = \dfrac{8}{\pi ab}\displaystyle\int_0^r (r-x)\,dx = \dfrac{4r^2}{\pi ab}. \end{cases}$$

Par substitution des valeurs de 2) et de 4) dans 3), on obtient

$$5)\qquad p = \frac{4r\,(a+b) - 4r^2}{\pi ab}.$$

Deuxième solution [1]. — θ est l'inclinaison de l'aiguille sur les lignes de la série I; ainsi se laisse spécifier, à l'intérieur du champ pris en considération, de la manière intuitive de la fig. 33 (p. 95), un rectangle $ABCD$, dans lequel le point milieu de l'aiguille ne peut pas tomber lorsqu'elle rencontre les lignes de division; au contraire, elle rencontre une ou deux de celles-ci lorsque son point milieu vient à se trouver à l'extérieur de ce rectangle; la probabilité y relative est

---

[1] D'après l' " Hist. of the mathem. Theory of Probab. ", de TODHUNTER, pag. 347 et 348.

$$(\alpha)\qquad \frac{2\,d\theta}{\pi}\cdot\frac{ab-(a-2r\sin\theta)(b-2r\cos\theta)}{ab};$$

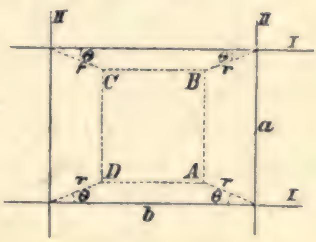
et la probabilité totale de l'événement déterminé

$$p=\frac{4r}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta+b\sin\theta-2r\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{4r(a+b)-4r^2}{\pi ab}.$$

Remarque. — Pour des champs quadratiques on trouve

$$p=\frac{4(2a-r)r}{\pi a^2},$$

Fig. 33.



tandis que Buffon (comp. au n° 65) a trouvé

$$p=\frac{2(a-r)r}{\pi a^2}.$$

69. **Problème XII**. — *Résoudre le problème précédent sous la condition que l'aiguille est plus longue que l'une ou que les deux dimensions des champs rectangulaires* (¹).

Solution. — La considération sur laquelle se fonde la seconde solution du problème précédent reste existante ici; seulement les limites d'intégration de l'expression (α) du n° 68 se changent, selon qu'une dimension ou que les deux dimensions du rectangle $ABCD$ (fig. 33), prises dans le sens $a-2r\sin\theta$, $b-2r\cos\theta$, deviennent négatives. Ce cas indique que, pour de telles directions de l'aiguille, les lignes de division sont rencontrées, quel que soit le lieu où le point milieu de l'aiguille tombe. Le deuxième facteur du produit (α) disparaît donc.

1. Soit $a<2r<b$, c'est-à-dire soit l'aiguille plus longue que la plus courte, plus courte que la plus grande distance. Alors, seule la hauteur AB (fig. 33) du rectangle $ABCD$ peut devenir négative; l'intégration de l'expression (α) est

(¹) Les indications que donne Todhunter (l. c.) sur la solution de ce cas sont incomplètes.

par conséquent à étendre seulement au domaine des valeurs de θ, pour lequel

$$2r \sin \theta < a,$$

ou

$$\theta < \arc \sin \frac{a}{2r}.$$

On a donc

$$1) \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{4r}{\pi a b} \int_0^{\arc \sin \frac{a}{2r}} (a \cos \theta + b \sin \theta - 2r \sin \theta \cos \theta) d\theta + \int_{\arc \sin \frac{a}{2r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 d\theta}{\pi} \\ &= \frac{a^2 + 4br - 2b\sqrt{4r^2 - a^2}}{\pi a b} + \frac{2}{\pi} \arc \cos \frac{a}{2r}. \end{aligned} \right.$$

2. Soit $a < b < 2r$, c'est-à-dire soit l'aiguille plus longue que l'une et l'autre distances. Dans ce cas, les deux dimensions du rectangle $ABCD$ (fig. 33) peuvent devenir négatives. L'intégration de (α) est à limiter donc seulement au domaine de θ, pour lequel domaine, simultanément est

$$2r \sin \theta < a \quad \text{et} \quad 2r \cos \theta < b,$$

ou

$$\theta < \arc \sin \frac{a}{2r} \quad \text{et} \quad \theta < \arc \cos \frac{b}{2r}.$$

Donc, pour ce cas, on a

$$2 \left\{ \begin{aligned} p &= \int_0^{\arc \cos \frac{b}{2r}} \frac{2 d\theta}{\pi} + \frac{4r}{\pi a b} \int_{\arc \cos \frac{b}{2r}}^{\arc \sin \frac{a}{2r}} (a \cos \theta + b \sin \theta - 2r \sin \theta \cos \theta) d\theta + \int_{\arc \sin \frac{a}{2r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 d\theta}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\arc \cos \frac{a}{2r} + \arc \cos \frac{b}{2r} \right) + \frac{a^2 + b^2 + 4r^2 - 2a\sqrt{4r^2 - b^2} - 2b\sqrt{4r^2 - a^2}}{\pi a b}. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière déduction est valable de nouveau seulement sous la condition

$$\arc \cos \frac{b}{2r} < \arc \sin \frac{a}{2r}$$

ou

$$2r < \sqrt{a^2 + b^2};$$

aussitôt que celle-ci n'est pas remplie, que l'aiguille est donc plus longue que la diagonale d'un champ, que l'aiguille dans toute position doit rencontrer les lignes de division, il vient $p = 1$.

Lorsque les champs sont quadratiques, $a = b < 2r < a\sqrt{2}$, la formule 2) fournit

$$3)\quad p = \frac{4}{\pi} \, arc\cos \frac{a}{2r} + \frac{2a^2 + 4r^2 - 4a\sqrt{4r^2 - a^2}}{\pi a^2}.$$

Remarque. — Si, dans la formule 1), on fait croître b à l'infini, on obtient

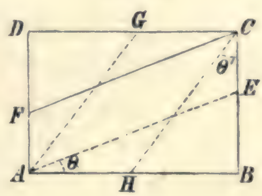
$$p = \frac{2}{\pi} \, arc\cos \frac{a}{2r} + \frac{2}{\pi a}(2r - \sqrt{4r^2 - a^2}),$$

s'accordant avec le résultat du problème X, n° 67, qui, par la transformation dite, devient identique au présent problème.

70. **Problème XIII**. — *Dans la surface d'un rectangle, un point quelconque est pris et par celui-ci une droite est menée arbitrairement. Trouver la probabilité pour que la droite coupe les côtés contigus, les côtés opposés.*

Solution. — 1. Soit $ABCD$ (fig. 34) le rectangle, $AB = a$, $BC = b$. Nous cherchons premièrement la probabilité pour que les côtés accouplés AB, BC soient coupés. L'inclinaison de la droite à envisager sur AB se trouve entre les limites 0 et $arc\,tang\,\frac{b}{a}$; on mène par A une droite AE ayant l'inclinaison représentée θ; et on obtient, pour la probabilité correspondante, l'expression

Fig. 34.



$$\frac{d\theta}{\pi} \cdot \frac{\Delta ABE}{ABCD} = \frac{a^2 \, tang\,\theta}{2ab} \cdot \frac{d\theta}{\pi};$$

d'autre part, l'inclinaison de la droite sur AB est comprise entre les limites $arc\,tang\,\frac{b}{a}$ et $\frac{\pi}{2}$; ou, sur CB, entre 0 et $arc\,tang\,\frac{a}{b}$; on mène par C une droite CH de l'inclinaison représentée θ', et on obtient comme probabilité pour que la droite menée arbitrairement par le point pris à volonté, avec cette inclinaison, rencontre les côtés AB, BC l'expression

$$\frac{d\theta'}{\pi}\cdot\frac{\Delta BCH}{ABCD}=\frac{b^2\, tang\,\theta'}{2ab}\cdot\frac{d\theta'}{\pi};$$

par conséquent, la probabilité totale de l'événement mentionné est égale à

$$1)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\pi ab}\left\{\int_0^{arc\, tang\frac{b}{a}}\frac{a^2}{2}\, tang\,\theta\, d\theta+\int_0^{arc\, tang\frac{a}{b}}\frac{b^2}{2}\, tang\,\theta'\, d\theta'\right\}\\&=\frac{1}{\pi ab}\left\{\frac{a^2+b^2}{4}\, l.(a^2+b^2)-\frac{a^2}{2}\, l.a-\frac{b^2}{2}\, l.b\right\}=\frac{\varphi(a,b)}{\pi ab}.\end{aligned}\right.$$

Cette probabilité est la même pour chacune des trois autres couples de côtés contigus; de manière que la probabilité totale de la coupure de côtés voisins égale

$$2)\ p_1=\frac{1}{\pi ab}\left\{(a^2+b^2)\, l.(a^2+b^2)-a^2 l.a^2-b^2 l.b^2\right\}=\frac{1}{\pi ab}\, l.\frac{c^{2cc}}{a^{2aa}\, b^{2bb}},$$

lorsque, par c, la diagonale du rectangle est désignée.

2. Les côtés opposés AD, BC peuvent être coupés seulement lorsque la droite a une inclinaison sur AB entre 0 et $arc\ tang\,\frac{b}{a}$; et pour une inclinaison déterminée θ, la probabilité y relative est

$$\frac{2d\theta}{\pi}\cdot\frac{AECF}{ABCD}=\frac{2(ab-a^2\, tang\,\theta)}{ab}\cdot\frac{d\theta}{\pi},$$

par conséquent, pour toutes les inclinaisons admissibles, elle est

$$3)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\pi ab}\int_0^{arc\, tang\frac{b}{a}}2(ab-a^2\, tg\,\theta)\, d\theta=\frac{1}{\pi ab}\left\{2ab\, arc\, tg\,\frac{b}{a}+2a^2\, l.a-a^2\, l.(a^2+b^2)\right\}\\&=\frac{\psi[a,(b)]}{\pi ab}.\end{aligned}\right.$$

Par des considérations semblables, on trouve la probabilité de la coupure de AB, DC, à savoir

$$4)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\pi ab}\int_0^{arc\, tang\frac{a}{b}}2(ab-b^2\, tg\,\theta')\, d\theta'=\frac{1}{\pi ab}\left\{2ab\, arc\, tg\,\frac{a}{b}+2b^2\, l.b-b^2\, l.(a^2+b^2)\right\}\\&=\frac{\psi[(a),b]}{\pi ab};\end{aligned}\right.$$

par 3) et par 4), s'obtient enfin la probabilité de la coupure de côtés opposés, c'est

$$5)\quad \begin{cases} p_2 = \dfrac{1}{\pi a b}\{a b \pi + 2a^2 l . a + 2b^2 l . b - (a^2 + b^2) l . (a^2 + b^2)\} \\ \quad = 1 - \dfrac{1}{\pi a b} l . \dfrac{c^{2cc}}{a^{2aa}\, b^{2bb}} = 1 - p_1. \end{cases}$$

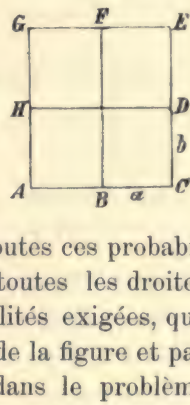
Pour le cas spécial d'un carré, est

$$p_1 = \frac{2}{\pi} l . 2, \quad p_2 = 1 - \frac{2}{\pi} l . 2.$$

71. **Problème XIV**. — *Dans un châssis composé de quatre vitres rectangulaires égales, est pris un point, et par celui-ci est menée une droite dans une direction arbitraire. Trouver la probabilité pour que la droite croise une, deux, trois vitres.*

Solution. — La largeur des joints est supposée imperceptible, et par conséquent négligeable. $ACEG$ représente le châssis (fig. 35) dont les vitres possèdent la largeur a et la hauteur b.

Fig. 35.



Pour la désignation abrégée de la probabilité pour que la droite menée coupe deux étendues, par exemple BC et CD, nous nous servons, dans la suite, du symbole $p\,(BC, CD)$, puis nous écartons provisoirement pour la simplification ultérieure encore le dénominateur $4\pi a b$ commun à toutes ces probabilités, lequel correspond à la quantité de toutes les droites possibles. Alors se livrent pour les probabilités exigées, que nous désignons par p_1, p_2, p_3, par l'examen de la figure et par l'utilisation des fonctions φ, ψ trouvées dans le problème précédent et définies par les équations 1), 3), 4), les expressions suivantes :

1. $p_1 = 4\,p\,(BC, CD)$, et comme $p\,(BC, CD) = \varphi\,(a, b)$, ainsi est

$$1)\qquad p_1 = 4\,\varphi\,(a, b).$$

2. $p_2 = 4\,p\,(AB, CD) + 4\,p\,(ED, BC) + 2\,p\,(AB, GF) + 2\,p\,(CD, AH)$;

maintenant, on a

$p(AB, CD) = p(AC, CD) - p(BC, CD) = \varphi(2a, b) - \varphi(a, b),$
$p(ED, BC) = \varphi(2b, a) - \varphi(a, b),$

$$p(AB, GF) = \psi[(a), 2b],$$
$$p(CD, AH) = \psi[(b), 2a];$$

conséquemment, on obtient

$$2)\quad \begin{cases} p_2 = 4\{\varphi(2a, b) + \varphi(2b, a) - 2\varphi(a, b)\} \\ \quad + 2\{\psi[(a), 2b] + \psi[(b), 2a]\}. \end{cases}$$

3. $p_3 = 4p(AB, DE) + 2p(AB, FE) + 2p(CD, HG);$

en cela

$$p(AB, DE) = p(AC, CE) - p(AC, CD) - p(BC, CE) + p(BC, CD)$$
$$= \varphi(2a, 2b) - \varphi(2a, b) - \varphi(2b, a) + \varphi(a, b);$$

la probabilité $p(BC, CD)$ doit être ajoutée, parce qu'elle est aussi bien la composante de $p(AC, CD)$ que de $p(BC, CE)$, et par conséquent, elle était soustraite deux fois au lieu de simplement une fois;

$$p(AB, FE) = p(AC, GE) - p(BC, GF) - p(AB, GF)$$
$$- p(BC, FE),$$

et comme manifestement $p(BC, GF) = p(AB, FE)$, ainsi on a ensuite

$$2p(AB, FE) = \psi[(2a), 2b] - 2\psi[(a), 2b],$$

analogiquement

$$2p(CD, HG) = \psi[(2b), 2a] - 2\psi[(b), 2a];$$

conséquemment est

$$3)\quad \begin{cases} p_3 = 4\{\varphi(2a, 2b) - \varphi(2a, b) - \varphi(2b, a) + \varphi(a, b)\} \\ \quad + \psi[(2a), 2b] + \psi[(2b), 2a] - 2\{\psi[(a), 2b] + \psi[(b), 2a]\}. \end{cases}$$

Finalement, les valeurs formées suivant les formules 1), 3) du nº 70 des fonctions particulières φ, ψ devraient être introduites dans les expressions 1), 2), 3) et le diviseur supprimé, $4\pi ab$, serait à rétablir.

Pour le cas spécial où les vitres sont carrées, les formules se simplifient comme suit :

$$4)\quad \begin{cases} p_1 = 4\varphi(a, a), \\ p_2 = 8\{\varphi(2a, a) - \varphi(a. a)\} + 4\psi[(a), 2a], \\ p_3 = 4\{\varphi(2a, 2a) - 2\varphi(2a, a) + \varphi(a, a)\} + 2\{\psi[(2a), 2a] - 2\psi[(a), 2a]\}; \end{cases}$$

dans ces valeurs, par les notions préliminaires du n° 70, on a

$$\varphi\,(a,\,a) = a^2\,(\tfrac{1}{2}\,l\,.\,2),$$
$$\varphi\,(2a,\,a) = a^2\,(\tfrac{5}{4}\,l\,.\,10 - \tfrac{13}{4}\,l\,.\,2),$$
$$\varphi\,(2a,\,2a) = a^2\,(2\,l\,.\,2),$$
$$\psi\,[(a),\,2a] = a^2\,(4\,\mathit{arc\,tang}\,\tfrac{1}{2} + 8\,l\,.\,2 - 4\,l\,.\,5),$$
$$\psi\,[(2a),\,2a] = a^2\,(2\pi - 4\,l\,.\,2);$$

si l'on introduit ces valeurs dans les expressions ci-dessus, on obtient finalement

$$p_1 = \frac{1}{4\pi}\,2\,l\,.\,2,$$

$$p_2 = \frac{1}{4\pi}\left\{12\,l\,.\,2 - 6\,l\,.\,5 + 16\,\mathit{arc\,tang}\,\tfrac{1}{2}\right\},$$

$$p_3 = \frac{1}{4\pi}\left\{6\,l\,.\,5 - 14\,l\,.\,2 + 4\pi - 16\,\mathit{arc\,tang}\,\tfrac{1}{2}\right\};$$

la somme $p_1 + p_2 + p_3$, comme ce doit être, est égale à 1.

Les calculs spécifiés, faits abrégément, donnent

$$p_1 = 0{,}110317, \quad p_2 = 0{,}483798, \quad p_3 = 0{,}405891.$$

Observation. — M'Coll trouve, par une autre voie (v. Éduc. Tim., tome XVI, page 31),

pour $a = \frac{1}{2}b$, $p_1 = 0{,}10833$, $p_2 = 0{,}49251$, $p_3 = 0{,}39916$;
„ $a = 2b$, $p_1 = 0{,}09955$, $p_2 = 0{,}53100$, $p_3 = 0{,}36945$.

72. Remarque. — Pour la détermination expérimentale des probabilités qui correspondent au cas spécial $a = b$, l'auteur a disposé une série d'épreuves, dont les résultats sont indiqués ci-après. En considération du mode primitif de l'exécution des épreuves, l'accord des probabilités déduites de l'expérience avec les valeurs théoriques peut être signalé comme suffisant.

Sur une feuille de papier à écrire, orbiculaire, était dessinée la figure correspondante à la question par des lignes au crayon; ensuite, avec la pointe du crayon, en aveugle, un point était marqué et, en même temps que le crayon reposait encore sur le papier, une règle était appliquée contre le crayon et la ligne tracée. Se comprenant de soi-même, les points, à l'extérieur de la figure, demeuraient là. Après chaque épreuve, la feuille de papier était tournée.

Au total, 2120 épreuves ont été effectuées sur six feuilles;

dans 208 cas, la ligne atteignit une vitre,
„ 1064 „ „ „ „ deux vitres,
„ 848 „ „ „ „ trois vitres.
2120

Les probabilités d'expérience correspondantes sont

$$0{,}098\ldots,\quad 0{,}502\ldots,\quad 0{,}400\ldots,$$

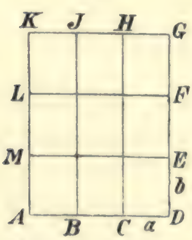
auxquelles font face les probabilités mathématiques

$$0{,}110\ldots,\quad 0{,}484\ldots,\quad 0{,}406\ldots.$$

73. **Problème XV.** — *Sur un châssis se composant de neuf vitres rectangulaires égales, est marqué un point et par celui-ci est tirée une droite dans une direction arbitraire. Déterminer la probabilité pour que la droite croise une, deux, trois, quatre, cinq vitres.*

Solution. — Comme dans le problème précédent et avec l'utilisation des mêmes désignations abréviatives, on obtient par l'examen de la fig. 36 pour les probabilités requises $p_1, p_2, \ldots p_8$ les expressions suivantes, dans lesquelles le dénominateur commun $9\pi ab$ est supprimé provisoirement :

Fig. 36.



1. $p_1 = 4p\,(CD,\ DE)$, et comme $p.(CD,\ DE) = \varphi\,(a,\ b)$, il vient

$$1)\qquad p_1 = 4\,\varphi\,(a,\ b).$$

2. $p_2 = 4p\,(BC.\ DE) + 4\,p\,(FE,\ CD)$; maintenant

$$p(BC, DE) = p(BD, DE) - p(CD, DE) = \varphi(2a, b) - \varphi(a, b),$$
$$p\,(FE, CD) = p(FD, CD) - p(CD, DE) = \varphi 2b, a) - \varphi(a, b);$$

par conséquent

$$2)\qquad p_2 = 4\,\{\,\varphi\,(2a,\ b) + \varphi\,(2b,\ a) - 2\,\varphi\,(a,\ b)\,\}\,.$$

3. $p_3 = 4p(AB, DE) + 4p(GF, CD) + 4p(BC, EF)$
$+ 3p(AM, DE) + 3p(AB, KJ)$; en cela est

$$p(AB, DE) = p(AD, DE) - p(BD, DE) = \varphi(3a, b) - \varphi(2a, b);$$

$p(GF, CD)$ en résulte par permutation de a avec b;

$$p(BC, EF) = p(BD, DF) - p(BD, DE) - p(FD, CD) + p(CD, DE)$$
$$= \varphi(2a, 2b) - \varphi(2a, b) - \varphi(2b, a) + \varphi(a, b),$$

— le terme $p(CD, DE)$ doit être ajouté, parce qu'il venait en déduction comme composant de $p(BD, DE)$ et de $p(FD, CD)$, deux fois, par conséquent une fois de trop;

$$p(AM, DE) = \psi[(b), 3a], \quad p(AB, KJ) = \psi[(a), 3b];$$

par substitution se donne donc

$$3) \left\{ \begin{array}{l} p_3 = 4\{\varphi(3a, b) + \varphi(3b, a) + \varphi(2a, 2b) - 2\varphi(2a, b) - 2\varphi(2b, a) + \varphi(a, b)\} \\ \quad + 3\{\psi[(b), 3a] + \psi[(a), 3b]\}. \end{array} \right.$$

4. $p_4 = 4p(AB, EF) + 4p(GF, BC) + 4p(BC, HG)$
$+ 4p(EF, AM)$; maintenant

$$p(AB, EF) = p(AD, DF) - p(AD, DE) - p(BD, DF) + p(BD, DE)$$
$$= \varphi(3a, 2b) - \varphi(3a, b) - \varphi(2a, 2b) + \varphi(2a, b),$$

le terme $p(BD, DE)$ est ajouté parce qu'il est aussi bien le composant de $p(AD, DE)$ que de $p(BD, DF)$, par conséquent il était déduit une fois de trop; $p(GF, BC)$ s'obtient de l'expression précisément acquise par la permutation de a avec b;

$$p(BC, HG) = p(BD, JG) - p(CD, JH) - p(BC, JH) - p(CD, HG),$$

ou, parce que manifestement

$$p(BC, HG) = p(CD, JH) \text{ et } p(BC, JH) = p(CD, HG),$$

$$2p(BC; HG) = \psi[(2a), 3b] - 2\psi[(a), 3b];$$

pour $p(EF, AM)$ se livre une expression analogue par permutation de a avec b; conséquemment, finalement s'obtient

$$4) \left\{ \begin{array}{l} p_4 = 4\{\varphi(3a, 2b) + \varphi(3b, 2a) - \varphi(3a, b) - \varphi(3b, a) \\ \qquad\qquad - 2\varphi(2a, 2b) + \varphi(2a, b) + \varphi(2b, a)\} \\ \quad + 2\{\psi[(2a), 3b] - 2\psi[(a), 3b] + \psi[(2b), 3a] - 2\psi[(b), 3a]\}. \end{array} \right.$$

5. $p_5 = 4p(AB, FG) + 2p(AB, HG) + 2p(GF, AM)$;

dans cette valeur, est

$$p(AB, FG) = p(AD, DG) - p(AD, DF) - p(BD, DG) + p(BD, DF)$$
$$= \varphi(3a, 3b) - \varphi(3a, 2b) - \varphi(2a, 3b) + \varphi(2a, 2b),$$

— $p\,(BD,\, DF)$ doit être ajouté, parce que ce terme, aussi bien dans $p\,(AD,\, DF)$ que dans $p\,(BD,\, DG)$, venait en déduction : par conséquent deux fois;

$$p\,(AB,\, HG) = p\,(AD,\, KG) - p\,(AC,\, HK) - p\,(BD,\, JG)$$
$$- p\,(CD,\, KJ) + p\,(BC,\, JH),$$

et comme $p(AB, HG) = p(CD, KJ)$ et $p(AC, HK) = p(BD, JG)$, ainsi est

$2p\,(AB,\, HG) = \psi\,[(3a), 3b] - 2\,\psi\,[(2a), 3b] + \psi\,[(a), 3b]$;
pour $2\,p\,(GF,\, AM)$, se livre une expression semblable par permutation de a avec b; par conséquent est

$$5)\quad \left\{ \begin{array}{l} p_5 = 4\,\{\varphi(3a,3b) - \varphi(3a,2b) - \varphi(2a,3b) + \varphi(2a,3b)\} \\ \quad + \psi[(3a,3b] - 2\psi[(2a),3b] + \psi[(a),3b] + \psi[(3b),3a] \\ \quad - 2\,\psi\,[(2b), 3a] + \psi\,[(b), 3a). \end{array} \right.$$

Dans les expressions 1) à 5), les valeurs formées suivant les équations 1), 3) du n° 70 des fonctions particulières φ et ψ seraient à introduire maintenant et le dénominateur commun, $9\pi\, ab$, devrait être rétabli.

Nous nous restreignons dans le développement ci-après de nouveau seulement au cas le plus simple des vitres carrées; les fonctions particulières reçoivent alors les valeurs suivantes :

$$\varphi\,(a, a) = a^2\,(\tfrac{1}{2}\,l.2),$$
$$\varphi\,(2a, a) = a^2\,(\tfrac{5}{4}\,l.10 - \tfrac{13}{4}\,l.2),$$
$$\varphi\,(3a, a) = a^2\,(\tfrac{5}{2}\,l.10 - \tfrac{9}{2}\,l.3),$$
$$\varphi\,(2a, 2a) = a^2\,(2l.2),$$
$$\varphi\,(3a, 2a) = a^2\,(\tfrac{14}{4}\,l.13 - \tfrac{9}{2}\,l.3 - 2l.2),$$
$$\varphi\,(3a, 3a) = a^2\,(\tfrac{9}{2}\,l.2),$$

$$\psi\,[(a), 3a] = a^2\,(6\,\mathit{arc\,tang}\,\tfrac{1}{3} + 18l.3 - 9\,l.10),$$
$$\psi\,[(2a), 3a] = a^2\,(12\,\mathit{arc\,tang}\,\tfrac{2}{3} + 18\,l.3 - 9l.13),$$
$$\psi\,[(3a), 3a] = a^2\,(\tfrac{9}{2}\pi - 9l.2);$$

pour les probabilités, se livrent donc les valeurs suivantes :

$$
6)\quad \left\{
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{9\pi} 2\,l\,.\,2, \\
p_2 &= \frac{1}{9\pi} (10\,l\,.\,10 - 30\,l\,.\,2), \\
p_3 &= \frac{1}{9\pi} (62\,l\,.\,2 + 72\,l\,.\,3 - 54\,l\,.\,10 + 36\, arc\,tang\, \tfrac{1}{3}), \\
p_4 &= \frac{1}{9\pi} (62 l.10 - 58 l.2 - 72 l.3 - 10 l.13 + 48 [arc\,tg\,\tfrac{2}{3} - arc\,tg\,\tfrac{1}{3}]), \\
p_5 &= \frac{1}{9\pi} (24 l.2 + 10 l.13 - 18 l.10 + 9\pi + 12\, arc\,tg\,\tfrac{1}{3} - 48\, arc\,tg\,\tfrac{2}{3}).
\end{aligned}
\right.
$$

Leur somme est nécessairement l'unité. Les valeurs réduites de ces probabilités sont :

$$p_1 = 0{,}049030, \qquad p_2 = 0{,}078921, \qquad p_3 = 0{,}329580,$$
$$p_4 = 0{,}374480, \qquad p_5 = 0{,}167988.$$

74. Remarque. — Elise Blackwood communique dans le tome XVI de l'Educ. Tim., page 55 et pages suivantes, les résultats qu'elle a obtenus expérimentalement pour ce problème proposé par elle. Les épreuves s'exécutèrent de la manière suivante : Sur un disque orbiculaire de papier fort, d'un côté du papier était mené un diamètre et au centre de celui-ci, de l'autre côté, était fixée une épingle. Autour de celle-ci, comme autour d'un pivot, le disque avait été tourné jusqu'à ce que le frottement eût été vaincu; de telle sorte qu'une légère impulsion suffisait à mettre le disque en rotation rapide. Sur une feuille de papier était dessinée une figure correspondante au châssis, par conséquent, divisée en tableaux. Sur l'épingle tenue avec la tête vers le bas, le disque était mis en rotation; pendant le tournement, un point était marqué à volonté sur le châssis, puis le disque soudainement arrêté était posé sur le châssis de façon que la tête de l'épingle, le plus possiblement exactement, coïncidât avec le point marqué. On notait combien de tableaux étaient rencontrés par le diamètre imaginé prolongé. Semblait-il que ce diamètre passât par un point où quatre tableaux représentant quatre vitres se joignent? Dans ce cas, non pas deux mais trois

tableaux étaient comptés parce qu'il est certain moralement, avec la largeur à se représenter infiniment petite des lignes de division, que la ligne ne rencontrera pas exactement un tel point. La ligne paraissait-elle passer par un point où deux tableaux se touchent, du bord du châssis? Le doute subsistait réellement; une telle épreuve était notée conséquemment dans chacun des nombres douteux par $\frac{1}{2}$.

Au total 1150 épreuves ont été effectuées avec le résultat suivant :

une	vitre	fut	croisée	58	fois,
deux	vitres	furent	croisées	98	„
trois	„	„	„	$391\frac{1}{2}$	„
quatre	„	„	„	405	„
cinq	„	„	„	$197\frac{1}{2}$	„ .

Les probabilités expérimentales calculées avec ces nombres,

0,050, 0,085, 0,340, 0,352, 0,173.

s'accordent étonnamment bien avec les valeurs théoriques

0,049 . . . , 0,079 . . . , 0,330 . . . , 0,374 . . . , 0,168 . . . ,

en considération du petit nombre des épreuves (comp. au n° 72).

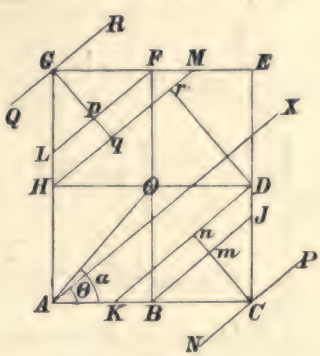
75. **Problème XVI**. — *Sur un châssis de quatre vitres rectangulaires égales, une droite est menée arbitrairement. Touver la probabilité pour que la droite croise une, deux, trois vitres.*

Solution. — La différence entre ce problème-ci et le problème XIV du n° 71 consiste en ce que là, après la prise du point arbitraire, il n'est plus à prendre arbitrairement que la direction de la droite, tandis qu'ici la position et la direction sont indéterminées et quelconques. Cependant le présent problème établi par WATSON (Éduc. Tim., tome XVI, page 32 et pag. suivantes) fut interprété et résolu dans le sens premièrement indiqué par M'COLL et J. W. MÜLLER (l. c.), ceux-ci définissant une droite menée arbitrairement, une droite qui est menée par un point quelconque dans une direction quelconque.

Nous désignons les probabilités requises par p_1, p_2. p_3.

$ACEG$ (fig. 37) représente le châssis; $AB = a$, $AH = b$, $AO = c$; AX est une droite menée de A dans une direction quelconque, laquelle droite, avec AC, forme l'angle $CAX = \theta$; on mène par B, D, F, H, C, G les droites BJ, DK, FL, HM, NP, QR parallèlement à AX. Aussitôt qu'une droite de la direction AX tombe entre NP et BJ ou entre FL et QR, elle croise UNE vitre; DEUX vitres lorsquelle vient à se trouver entre BJ et DK ou entre FL et HM; enfin TROIS vitres lorsqu'elle se trouve entre DK et HM. On construit Cmn, Gpq, Dr rectangulairement à AX; pour les événements rapportés, aussi longtemps que θ est plus petit que $CAO = \alpha$, s'obtiennent les probabilités

Fig. 37.



$$\frac{(Cm + Gp)\, d\theta}{N} = \frac{2a \sin\theta\, d\theta}{N},$$

$$\frac{(mn + pq)\, d\theta}{N} = \frac{2\,(b \cos\theta - a \sin\theta)\, d\theta}{N},$$

$$\frac{Dr \,.\, d\theta}{N} = \frac{2a \sin\theta\, d\theta}{N};$$

dans ces valeurs, on a

$$N = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{ 2a \sin\theta + 2\,(b \cos\theta - a \sin\theta) + 2a \sin\theta \}\, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (a \sin\theta + b \cos\theta)\, d\theta = 2\,(a + b).$$

Lorsque θ devient plus grand que α, a et b échangent leurs rôles et à la place de θ vient son complément; les probabilités pour ce domaine de valeurs de θ et pour une direction déterminée sont donc

$$\frac{2b \cos\theta\, d\theta}{N}, \quad \frac{2\,(a \sin\theta - b \cos\theta)\, d\theta}{N}, \quad \frac{2b \cos\theta\, d\theta}{N}.$$

Par conséquent est

$$1)\text{ et }3)\left\{\begin{aligned} p_1 = p_3 &= \frac{1}{a+b}\left\{a\int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta + b\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} \cos\theta\, d\theta\right\} \\ &= \frac{1}{a+b}\{a+b-(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\} = 1-\frac{c}{a+b}; \end{aligned}\right.$$

$$2)\left\{\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{a+b}\left\{\int_0^{\alpha}(b\cos\theta - a\sin\theta)\,d\theta + \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}\pi}(a\sin\theta - b\cos\theta)\,d\theta\right\} \\ &= \frac{1}{a+b}\{2(a\cos\alpha + b\sin\alpha)-(a+b)\} = \frac{2c}{a+b}-1. \end{aligned}\right.$$

A l'aide de ces formules on trouve, par exemple,

pour $a = b \ldots \quad p_1 = p_3 = 0{,}29289, \quad p_2 = 0{,}41421;$

„ $a = \frac{4}{3}\, b \ldots\; p_1 = p_3 = 0{,}28572, \quad p_2 = 0{,}42875;$

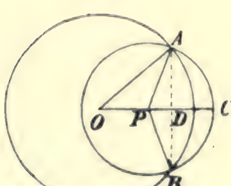
„ $a = 2b \ldots \quad p_1 = p_3 = 0{,}25464, \quad p_2 = 0{,}49071.$

(Comparer aux résultats du nº 71).

76. **Problème XVII**. — *D'un point pris arbitrairement dans un cercle donné, une droite de longueur donnée, de direction quelconque est menée. Trouver la probabilité pour que la droite coupe la circonférence du cercle.*

Solution. — Soit O (fig. 38), le centre du cercle donné, r son rayon, a la longueur donnée. Supposé que le point marqué arbitrairement tombe à la distance x de O, par exemple en P — la probabilité correspondante est $\frac{2\pi x dx}{\pi r^2} = \frac{2}{r^2} x dx$ —; on décrit de P comme centre avec la longueur a comme rayon un cercle qui coupe le cercle donné en A, B. La droite menée de P ne coupe la circonférence que lorsqu'elle tombe dans l'angle $APB = 2\angle APC$;

Fig. 38.



la probabilité y relative est $\frac{\angle APC}{\pi}$. Dans le triangle AOP, on a

$$r^2 = x^2 + a^2 + 2ax\cos APC;$$

s'en ensuit

$$\angle APC = \operatorname{arc\,cos} \frac{r^2 - a^2 - x^2}{2ax}.$$

La probabilité totale, composée de l'événement en question est donc

$$p = \frac{2}{\pi r^2} \int_{r-a}^{r} x \operatorname{arc\,cos} \frac{r^2 - a^2 - x^2}{2ax}\, dx.$$

Par intégration par parties, se donne premièrement

$$\int x \operatorname{arc\,cos} \frac{r^2-a^2-x^2}{2ax}\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{r^2-a^2-x^2}{2ax} - \frac{1}{2} \int \frac{r^2 + x^2 - a^2}{\sqrt{4a^2x^2-(r^2-a^2-x^2)^2}}\, x\, dx;$$

si l'on fait usage, sous le signe d'intégration, à main droite, de l'identité

$$4a^2x^2 - (r^2 - a^2 - x^2)^2 = 4a^2r^2 - (r^2 + a^2 - x^2)^2,$$

il vient

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{arc\,cos} \frac{r^2-a^2-x^2}{2ax}\, dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{r^2-a^2-x^2}{2ax} + \frac{r^2}{2} \int \frac{-2x\, dx}{\sqrt{4a^2r^2-(r^2+a^2-x^2)^2}} \\
&\quad + \frac{1}{8} \int \frac{-2(r^2+a^2-x^2).-2x\,dx}{\sqrt{4a^2r^2-(r^2+a^2-x^2)^2}} \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{r^2-a^2-x^2}{2ax} - \frac{r^2}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{r^2+a^2-x^2}{2ar} \\
&\quad + \frac{1}{4}\sqrt{4a^2r^2-(r^2+a^2-x^2)^2}
\end{aligned}$$

Après introduction des limites, on obtient finalement

$$p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sin} \frac{a}{2r} + \frac{a\sqrt{4r^2 - a^2}}{2\pi r^2}.$$

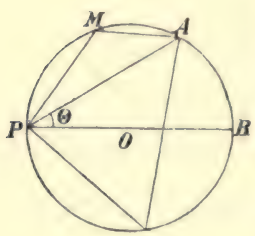
La déduction a été effectuée avec la supposition $a < r$; pour $a > r$, le même résultat s'obtient après un calcul semblable.

Pour $a = 2r$, comme ce doit être, on trouve $p = 1$, et pour $a = r$

$$p = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

77. **Problème XVIII**. — *Sur la circonférence d'un cercle donné, deux points sont pris arbitrairement et par chacun d'eux une droite de direction quelconque est menée. Découvrir la probabilité pour que ces droites se coupent dans le cercle.*

Fig. 39.



Solution. — Soit O (fig. 39) le centre du cercle, P un des deux points, POB le diamètre mené par lui, PA la droite menée arbitrairement. L'angle BPA est désigné par θ. La probabilité de la direction prise, PA, est égale à $\frac{d\theta}{\pi}$.

Le second point Q peut tomber, ou sur l'arc PMA, ou sur l'arc $PNBA$; les probabilités y relatives sont respectivement $\frac{\pi - 2\theta}{2\pi}$, $\frac{\pi + 2\theta}{2\pi}$. Dans le premier cas, l'angle $PMA = \frac{\pi + 2\theta}{2}$, dans l'autre cas l'angle $PNA = \frac{\pi - 2\theta}{2}$ sont une mesure de la quantité des directions favorables de la seconde droite. La probabilité totale, composée de l'événement en question est par conséquent

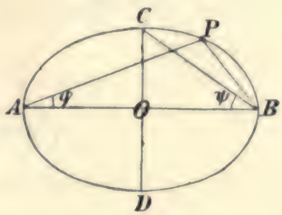
$$p = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\pi}\left\{\frac{\pi - 2\theta}{2\pi}\cdot\frac{\pi + 2\theta}{2\pi} + \frac{\pi + 2\theta}{2\pi}\cdot\frac{\pi - 2\theta}{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\pi^2 - 4\theta^2)\,d\theta = \frac{1}{3}.$$

78. **Problème XIX**. — *Par les sommets du grand axe d'une ellipse donnée sont menées deux lignes droites de directions quelconques. Déterminer la probabilité pour qu'elles se coupent à l'intérieur de l'ellipse.*

Solution. — Soit le rapport des axes de l'ellipse $\frac{b}{a} = m$. On mène par A et par B (fig. 40) des lignes droites qui se coupent en un point P de l'ellipse, et on désigne les angles PAB, PBA, que ces droites enserrent avec AB, par φ et ψ. Puis, si l'on désigne les coordonnées du point P, par rapport au centre de l'ellipse, par x, y, on a

Fig. 40.



$$tang\,\varphi = \frac{y}{a+x}, \quad tang\,\psi = \frac{y}{a+x},$$

d'où

$$1) \qquad tang\,\varphi\; tang\,\psi = \frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2} = m^2.$$

En vertu de la symétrie de la figure, il suffira de chercher la probabilité pour que l'intersection des droites menées par A et par B advienne dans un quart déterminé, par exemple OBC, et de quadrupler cette probabilité.

Tant que l'angle $PBA = \psi$ est plus petit que l'angle $CBA = arc\;tang\;m$, la droite BP est coupée par les droites menées par A dans le quart indiqué, lorsque l'angle d'inclinaison φ de ces droites est plus petit que ψ.

Mais l'angle $PBA = \psi$ devient-il plus grand que l'angle $CBA = arc\;tang\;m$? L'intersection dans le quart indiqué n'arrive que lorsque l'angle d'inclinaison φ de la droite menée par A demeure sous la limite marquée par l'équation 1), donc lorsque $\varphi < arc\;tang\,(m^2\;cotg\;\psi)$.

Conséquemment, la probabilité requise est

$$2) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= 4 \left\{ \int_0^{arc\,tang\,m} \frac{d\psi}{\pi} \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\pi} \times \int_{arc\,tang\,m}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\pi} \int_0^{arc\,tang\,(m^2\,cotg\,\psi)} \frac{d\varphi}{\pi} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ (arc\,tang\,m)^2 + 2 \int_{arc\,tang\,m}^{\frac{1}{2}\pi} arc\,tang\,(m^2\,cotg\,\psi)\,d\psi \right\}. \end{aligned} \right.$$

La fonction cyclométrique sous l'intégrale, développée en série, donne

$$arctg(m^2 cotg\,\psi) = m^2 cotg\,\psi - \tfrac{1}{3} m^6 cotg^3\psi + \tfrac{1}{5} m^{10} cotg^5\psi - \tfrac{1}{7} m^{14} cotg^7\psi + \dots ;$$

on considère ensuite l'identité

$$cotg^n\psi\,d\psi = cont^{n-2}\psi(cosec^2\psi - 1)\,d\psi = -cotg^{n-2}\psi\,d(cotg\,\psi) - cotg^{n-2}\psi\,d\psi;$$

ainsi devient

$$\int_{arc\,tang\,m}^{\frac{1}{2}\pi} arc\,tang\,(m^2\,cotg\,\psi)\,d\,\psi$$

$$= m^2 \left\{ -l\left(\frac{m^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}m^4 - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}m^6 + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{3}m^6\,l\,.\left(\frac{m^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}m^{10}\left[\frac{1}{2m^2} + l\,.\left(\frac{m^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$- \frac{1}{7}m^{14}\left[\frac{1}{4m^4} - \frac{1}{2m^2} - l\,.\left(\frac{m^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \dots$$

et

$$2\int_{arc\,tang\,m}^{\frac{1}{2}\pi} arc\,tang\,(m^2\,cotg\,\psi)\,d\,\psi$$

$$= m^2\left(1 + \frac{1}{3}m^4 + \frac{1}{5}m^8 + \frac{1}{7}m^{12} + \dots\right) l\,.\,\frac{1+m^2}{m^2} - \frac{1}{3}m^4 + \frac{1}{5}m^6\left(\frac{1}{2} - m^2\right)$$

$$- \frac{1}{7}m^8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}m^2 + m^4\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\,l\cdot\frac{1+m^2}{1-m^2}\,l\cdot\frac{1+m^2}{m^2} - \frac{1}{3}m^4 + \frac{1}{5}m^6\left(\frac{1}{2} - m^2\right) - \frac{1}{7}m^8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}m^2 + m^4\right) + \dots$$

Par introduction de cette expression dans l'équation 2), on obtient finalement

$$3)\quad \left\{ \begin{array}{l} p + \dfrac{2}{\pi^2}\left\{ (arctg\,m)^2 + \dfrac{1}{2}\,l\cdot\dfrac{1+m^2}{1-m^2}\,l\cdot\dfrac{1+m^2}{m^2} - \dfrac{1}{3}m^4 + \dfrac{1}{5}m^6\left(\dfrac{1}{2} - m^2\right) \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{1}{7}m^8\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}m^2 + m^4\right) + \dots \right\}. \end{array} \right.$$

Pour le cercle, où $m = 1$, l'équation 2) s'écrit plus simplement

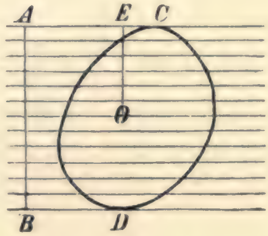
$$4) \qquad p = \frac{2}{\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{16} + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) d\,\psi\right\} = \frac{1}{4}.$$

Pour de petites valeurs de m, la série développée de p est fort promptement convergente.

79. **Théorème III.** — *Le nombre de toutes les droites arbitraires qui coupent une courbe plane, fermée, convexe est mesurée par la longueur de la courbe.*

Démonstration. — Nous nous représentons un des systèmes de parallèles, desquels la totalité en question est composée (v. n° 55); ce système peut, avec une direction fixe, comprendre l'angle θ. La quantité des droites de ce système est mesurée par la distance perpendiculaire des lignes limites AC et BD (fig. 41), par $AB = b$. La quantité des droites des systèmes qui forment avec la direction fixe des angles entre θ et $\theta + d\theta$ est exprimée conséquemment par $b d\theta$ et la quantité de toutes les droites qui coupent la courbe par

Fig. 41.



$$1) \qquad \int_0^{\pi} b\,d\theta = L;$$

dans cette expression, L signifie la longueur de la courbe.

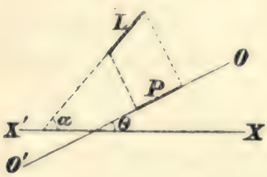
Remarque I. — La proposition ici utilisée est un cas spécial de la proposition générale sur la rectification des courbes planes, proposition générale que Cauchy a indiquée sans démonstration dans le XIIIe tome des " Comptes rendus " (1841, Juillet/Décembre, page 1060). Celle-ci s'énonce comme suit : " θ désigne l'angle qu'une droite $O\,O'$ menée à volonté
" dans un plan forme avec un axe fixe XX'; L, la somme
" d'une ou de plusieurs longueurs mesurées sur une ou sur
" plusieurs lignes droites ou courbes fermées ou non fermées;

„ P, la somme des valeurs absolues des projections des „ éléments de L sur $O\,O'$; on a

$$L = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} P\,d\theta.\text{“}$$

Pour obtenir la démonstration, il suffit de considérer une seule longueur L (fig. 42) mesurée sur une droite qui forme, avec l'axe fixe XX', l'angle α; la projection de cette longueur — ou la somme des valeurs absolues des projections de ses éléments — sur $O\,O'$ est

Fig. 42.



$$P = L \cos(\alpha - \theta);$$

par conséquent

$$\int P\,d\theta = L \int \cos(\alpha - \theta)\,d\theta.$$

Si l'on intègre des deux côtés entre les limites $-\pi$ et $+\pi$, cependant pour des valeurs absolues de P, à droite donc pour des valeurs absolues de $\cos(\alpha - \theta)$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} P\,d\theta = L\,.\,4 \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha - \theta)\,d\theta = 4\,L;$$

d'où résulte effectivement

$$L = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} P\,d\theta.$$

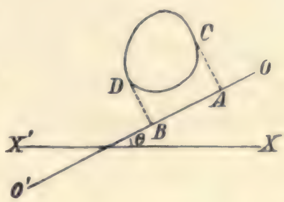
L'extension de la proposition à une courbe quelconque ne nécessite pas d'explication plus ample.

Particulièrement, la courbe est-elle fermée et convexe (fig. 43, p. 115)? P ou la somme des valeurs absolues des projections de tous les éléments est égale à la double projection $A\,B = b$ de la courbe entière sur $O\,O'$ ou à la double largeur mesurée dans la direction de $O\,O'$ de la courbe. On a par conséquent

$$L = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} b\, d\theta,$$

et comme, par le tournement de OO' tracé par les limites d'intégration, toutes les valeurs de b se présentent deux fois et toutes les valeurs en général se présentent entre 0 et π, ainsi aussi est

Fig. 43.



$$L = \int_0^{\pi} b\, d\theta;$$

par quoi, la proposition plus haut utilisée est démontrée.

Remarque II. — Si l'on mène d'un point O (fig. 41) fixe, choisi à l'intérieur de la courbe, une perpendiculaire $OE = p$ à la tangente AC, on peut écrire aussi pour 1)

$$2) \qquad \int_0^{2\pi} p\, d\theta = L.$$

80. **Théorème IV.** — *Le nombre de toutes les droites qui coupent une courbe non-convexe, fermée, est mesuré par la longueur du fil tendu fermement autour de cette courbe.*

Démonstration. — Car toutes les droites qui coupent la courbe $AB'CD'$ (fig. 44) convexe, cernant $ABCD$, rencontrent aussi la courbe $ABCD$ non-convexe et hors de ces droites il n'y a aucune droite qui coupe $ABCD$.

Fig. 44.

81. **Problème XX.** — *Une courbe convexe, fermée, de longueur* L *entoure une seconde courbe pareille, de longueur* l. *Trouver la probabilité pour qu'une droite coupant* L *rencontre aussi* l.

Solution. — Sans explication plus ample, se donne

$$p = \frac{l}{L};$$

la probabilité requise est donc indépendante de la situation autre, relative des deux courbes.

Remarque. — La rectification expérimentale d'une courbe convexe, fermée pourrait être fondée sur ce qui précède. (Rapprocher de la réflexion à la suite de laquelle Laplace introduit le problème de l'aiguille. Théo. anal. des prob., pag. 359). On enceint la courbe à rectifier d'une autre ligne (cercle, polygone) convexe, fermée, de longueur connue, L; on mène dans le plan des deux courbes un grand nombre s de droites arbitraires coupant L et on compte celles qui rencontrent aussi la ligne de longueur inconnue l; soit m leur nombre. D'autant plus grand est s, d'autant plus exactement concluera l'équation

$$\frac{m}{s} = \frac{l}{L};$$

de laquelle, résulte $l = \frac{m}{s} L$.

82. **Problème XXI**. — *Un disque de périmètre convexe, de forme quelconque, est jeté sur un plan qui est traversé par une suite de parallèles équidistantes. Supposé que le disque ne puisse en aucune position rencontrer en même temps plusieurs lignes de division, déterminer la probabilité pour que le disque rencontre une ligne de division.*

Solution. — Le présent problème permet l'interprétation suivante : le disque dont la courbe de contour a la longueur l est enceint d'un cercle L dont le diamètre est égal à la distance réciproque a des lignes de division. Actuellement, une droite est menée arbitrairement, qui coupe le cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle rencontre aussi la courbe l?

En vertu du problème précédent, la probabilité est

$$p = \frac{l}{L} = \frac{l}{\pi a}.$$

Le cas le plus simple du problème de l'aiguille de Buffon (v. n° 64) peut être interprété comme un cas spécial du présent problème, en supposant que l'aiguille est la limite d'un disque elliptique à axe secondaire s'évanouissant et à axe principal de la longueur $2r$, plus courte que la distance a des parallèles. Alors est $l = 4r$ et

$$p = \frac{4r}{\pi a}.$$

Remarque. — Dans le problème ci-dessus, se trouve renfermée la solution générale du jeu de hasard appelé par les Français " Jeu du joint couvert ". Le parquet d'une chambre est divisé par des joints parallèles en bandes d'égale largeur; une monnaie est jetée sur ce plancher. Avec quelle probabilité rencontrera-t-elle un des joints, supposé qu'elle ne puisse jamais en rencontrer plus d'un?

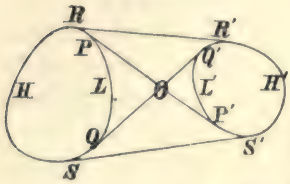
Dans le journal de *Liouville* (1860, pag. 273), E. Barbier nous apprend que Lamé, dans ses leçons à la faculté des sciences, en 1860, comme jonction au problème de l'aiguille, a traité le cas plus général : un disque, au lieu d'une aiguille, est jeté, dont le contour est un cercle, une ellipse, un polygone régulier. De ce que, dans ces trois cas, l'expression $\frac{l}{\pi a}$ est obtenue comme résultat final, Barbier conclut que ceux-ci sont des cas spéciaux d'un théorème général. Barbier produit ce théorème, qui trouve dans la solution du problème actuel son énonciation, et le présente, quant à l'exposition, sous la forme d'un jeu de hasard. Il trouve d'abord que la probabilité de la rencontre d'un joint par le disque dépend de la longueur de son contour, et il indique ensuite la voie par laquelle on peut parvenir à l'expression $\frac{l}{\pi a}$.

83. **Théorème V**. — *Le nombre de toutes les droites arbitraires qui coupent en même temps deux courbes fermées, convexes, extérieures l'une à l'autre est mesuré par la différence des longueurs de deux fils sans fin les embrassant; le premier fil se croise entre les courbes, l'autre est en dehors d'elles.*

Démonstration. — Dans la fig. 45 (p. 118), PQH, $P'Q'H'$ sont les deux courbes; le fil se croisant se compose des arcs PHQ, $P'H'Q'$ et des tangentes communes intérieures PP', QQ'; soit X sa longueur; le fil extérieur se compose des arcs RHS, $R'H'S'$ et des tangentes communes extérieures RR', SS'; soit Y sa longueur. Nous nous servirons ci-après, pour la désignation du nombre de toutes les droites qui rencontrent une courbe C, du symbole $N\ (C)$, et pour la désignation du nombre de toutes les droites qui coupent en même temps deux courbes C, C' du symbole $N(C, C')$. Avec ce mode de désignation, s'écrit la proposition à démontrer sous la forme

$$N(PQH, P'Q'H') = X - Y.$$

Fig. 45.



La totalité en question des droites est manifestement identique à la totalité des droites qui coupent en même temps les deux figures fermées, mixtilignes $OPHQ$ et $O'P'H'Q'$; car toute droite qui rencontre ces deux figures coupe aussi les deux courbes données, et il ne peut être imaginé d'autre droite qui rencontrerait les dernières sans couper en même temps les deux premières. On a donc

$$1)\quad N(PQH, P'Q'H') = N(OPHQ, OP'H'Q').$$

Dans la somme $N(OPHQ) + N(OP'H'Q')$, est contenue, en plus de la totalité des droites qui coupent la figure croisée $PP'H'Q'QH$, la totalité des droites qui coupent $OPHQ$ et $OP'H'Q'$ en même temps. Car cette dernière totalité se trouve deux fois dans la somme considérée, parce que dans chaque terme elle se trouve une fois; mais dans $N(PP'H'Q'QH)$ elle se trouve seulement une fois; donc, pour établir l'égalité, elle doit être ajoutée une fois; par conséquent, on a

$$\begin{aligned} N(OPHQ) + N(OP'H'Q') &= N(PP'H'Q'QH) \\ &\quad + N(OPHQ, OP'H'Q') \end{aligned}$$

ou en considération de 1)

$$\begin{aligned} 2)\quad N(OPHQ) + N(OP'H'Q') &= N(PP'H'Q'QH) \\ &\quad + N(PQH, P'Q'H'). \end{aligned}$$

$OPHQ$, $OP'H'Q'$ sont des lignes convexes, la somme de leurs longueurs est X. En échange, $PP'H'Q'QH$ est une courbe partiellement concave; la quantité des droites qui la coupent est mesurée par la longueur du fil convexe l'embrassant; mais celui-ci est $RHSS'H'R'R$ et sa longueur Y. Introduit-on ces valeurs dans 2)? Il vient

$$X = Y + N(PQH, P'Q'H');$$

d'où résulte effectivement

$$3) \qquad N(PQH, P'Q'H') = X - Y.$$

84. **Problème XXII**. — *Trouver la probabilité pour qu'une droite quelconque qui coupe une courbe fermée, convexe, de longueur* L *rencontre une seconde courbe située dans le même plan, de même configuration, lorsque les deux courbes sont extérieures l'une à l'autre.*

Solution. — En vertu de la proposition susdite et avec les désignations y employées, est

$$p = \frac{X - Y}{L}.$$

Remarque. — Si la seconde courbe se réduit à un point, on a $X = Y$ et $p = 0$, c'est-à-dire qu'il est impossible moralement parlant qu'une droite quelconque qui coupe la courbe L passe aussi par le point donné, ou autrement dit, la totalité des droites qui, coupant la courbe L, passent par le point donné, est une fraction infiniment petite de la totalité de toutes les droites qui coupent L.

Cependant, inversement, la probabilité est-elle demandée, pour qu'une droite menée à volonté par le point coupe la courbe L? La réponse s'énonce

$$p = \frac{\theta}{\pi},$$

dans laquelle θ désigne l'angle sous lequel la courbe est vue du point

85. **Problème XXIII**. — *Trouver la probabilité pour qu'une droite qui coupe un côté d'un carré donné rencontre aussi le côté opposé.*

Solution. — Le présent problème peut être envisagé comme un cas spécial du précédent en considérant chacun des deux côtés choisis du carré comme une courbe fermée de longueur $2a$; a est le côté du carré. Ainsi, on a

$$X = 2a + 2a\sqrt{2}, \quad Y = 4a, \quad L = 2a;$$

par conséquent,

$$p = \sqrt{2} - 1.$$

86. **Problème XXIV.** — *Trouver la probabilité pour qu'une droite qui coupe une courbe fermée, convexe, de longueur* L *rencontre simultanément une courbe la touchant, ayant les mêmes propriétés et la longueur* L'.

Dans ce cas spécial du n° 84, on a $X = L + L'$; conséquemment,

$$p = \frac{L + L' - Y}{L}.$$

Les deux courbes sont-elles, par exemple, des cercles de même rayon 1? On obtient

$$p = \frac{2\pi + 2\pi - (2\pi + 4)}{2\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

87. **Problème XXV.** — *Trouver la probabilité pour qu'une droite qui coupe un côté d'un carré donné rencontre simultanément l'un (désigné directement) des deux côtés contigus.*

Solution. — Les deux côtés contigus résultants peuvent équivaloir à deux courbes convexes se touchant, chacune de longueur $2a$, a étant le côté du carré, et, dans ce sens, on a

$$L = L' = 2a, \quad Y = 2a + a\sqrt{2};$$

par conséquent,

$$p = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

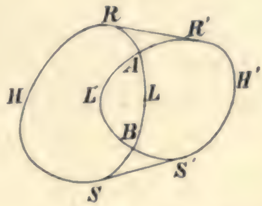
88. **Problème XXVI.** — *Trouver la probabilité pour qu'une droite qui coupe une courbe fermée, convexe, de longueur* L *rencontre aussi une seconde courbe de même nature et de longueur* L' *coupant la première.*

Solution. — 1. Les courbes se coupent en deux points (fig. 46, p. 121). Dans la somme $N(L) + N(L')$ sont contenues les droites qui coupent la figure partiellement concave $ARHBH'A$; parmi celles-ci, se présentent seulement une fois les droites qui rencontrent en même temps L et L', pendant qu'elles apparaissent deux fois dans la somme dite parce qu'elles sont dans chaque terme sommé. Par conséquent, on a l'équation

$$N(L) + N(L') = N(ARHBH'A) + N(L, L');$$

le premier terme du second membre se rapporte à une figure concave, qui est à remplacer par le fil l'embrassant, $RHSS'H'R'R$, de longueur Y. Par cette remarque, s'écrit l'équation ci-dessus

Fig. 46.



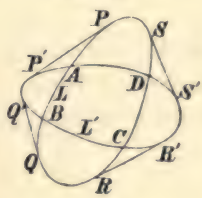
$$L + L' = Y + N(L, L');$$

d'où résulte

$$N(L, L') = L + L' - Y.$$

2. Les courbes se coupent en quatre points (fig. 47). Dans la somme $N(L) + N(L')$ sont comptées toutes les lignes qui coupent la figure concave $AP'BQCR'DSA$, parmi lesquelles deux fois celles qui rencontrent simultanément L et L'; la figure concave est à remplacer de nouveau par le fil l'embrassant, $PP'Q'QRR'S'S$, de longueur Y. La conclusion est la même qu'auparavant; par conséquent, le résultat est aussi

Fig. 47.



$$N(L, L') = L + L' - Y.$$

La probabilité requise est donc dans les deux cas

$$p = \frac{L + L' - Y}{L}.$$

89. **Problème XXVII**. — *Une droite menée arbitrairement coupe une diagonale d'un carré donné; découvrir la probabilité pour que cette droite rencontre aussi l'autre diagonale dans l'intérieur du carré.*

Solution. — Les deux diagonales peuvent être envisagées comme deux courbes fermées, convexes qui se coupent en quatre points, et dont chacune possède la longueur $2a\sqrt{2}$, lorsque a indique le côté du carré. Dans le sens du problème précédent, on obtient alors

$$L = L' = 2a\sqrt{2}, \quad Y = 4a;$$

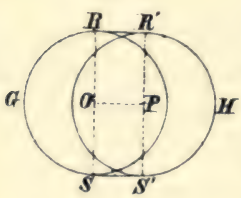
par conséquent,

$$p = 2 - \sqrt{2}.$$

90. **Problème XXVIII**. — *A l'intérieur d'un cercle donné, de rayon* r, *est pris arbitrairement un point; découvrir la probabilité pour qu'une sécante du cercle, menée à volonté passe à une distance du point plus petite que* r.

Solution. — Soit O (fig. 48) le centre du cercle donné, P le point marqué arbitrairement; si $OP = \varrho$, la probabilité de la position indiquée de P est

Fig. 48.



$$\frac{2\pi\varrho\, d\varrho}{\pi r^2} = \frac{2}{r^2}\varrho\, d\varrho.$$

Un cercle est décrit de P comme centre avec le rayon r; on reconnaît qu'une sécante menée à volonté, du cercle donné, ne satisfait à la condition de la question que lorsqu'elle coupe en même temps ce deuxième cercle. La probabilité y relative est à calculer d'après la formule finale du nº 88; dans le cas présent, on a

$$L = L' = 2\pi r, \quad Y = 2\pi r + 2\varrho;$$

par conséquent,

$$p = \frac{\pi r - \varrho}{\pi r}.$$

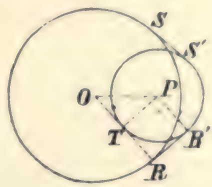
Par suite, la probabilité totale composée de l'événement en question est

$$\Pi = \int_0^r \frac{2}{r^2}\varrho\, d\varrho \cdot \frac{\pi r - \varrho}{\pi r} = \frac{2}{\pi r^3}\int_0^r (\pi r - \varrho)\varrho\, d\varrho = 1 - \frac{2}{3\pi}.$$

91. **Problème XXIX**. — *A l'intérieur d'un cercle donné de rayon* r *est pris à volonté un point; trouver la probabilité pour qu'une sécante du cercle, menée arbitrairement soit à une distance du point plus petite que* e.

Solution. — Comme dans le cas précédent, soit O (fig. 49), le centre du cercle donné, P le point pris arbitrairement.

Fig. 49.



Premièrement soit $OP = \varrho > r - e$; le cercle décrit de P avec le rayon e coupe le cercle donné; les relations se trouvent semblables à celles du n° 90 et, avec les désignations choisies là, on a

$$L = 2\pi r, \quad L' = 2\pi e,$$

$$Y = 2\pi r - 2r \arccos \frac{r-e}{\varrho} + 2e \arccos \frac{r-e}{\varrho} + 2\sqrt{\varrho^2 - (r-e)^2};$$

la probabilité relative à ce cas est donc

$$\Pi_1 = \int_{r-e}^{r} \frac{2}{r^2} \varrho \, d\varrho \cdot \frac{\pi e + (r-e) \arccos \frac{r-e}{\varrho} - \sqrt{\varrho^2 - (r-e)^2}}{\pi r}$$

$$= \frac{2}{\pi r^3} \int_{r-e}^{r} \left(\pi e + (r-e) \arccos \frac{r-e}{\varrho} - \sqrt{\varrho^2 - (r-e)^2}\right) \varrho \, d\varrho.$$

Maintenant est

$$\int_{r-e}^{r} \pi e \varrho \, d\varrho = \frac{1}{2} \pi e \{ r^2 - (r-e)^2 \};$$

si l'on pose dans le second membre $\frac{r-e}{\varrho} = u$, il vient

$$\int_{r-e}^{r} \arccos \frac{r-e}{\varrho} \varrho \, d\varrho = -(r-e)^2 \int_{1}^{\frac{r-e}{r}} u^{-3} \arccos u \, du,$$

et par intégration par parties

$$(r-e) \int_{r-e}^{r} \arccos \frac{r-e}{\varrho} \varrho \, d\varrho = \frac{r^2(r-e)}{2} \arccos \frac{r-e}{r} - \frac{(r-e)^2}{2} \sqrt{r^2 - (r-e)^2};$$

enfin est

$$\int_{r-e}^{r} \sqrt{\varrho^2 - (r-e)^2} \varrho \, d\varrho = \frac{1}{3} \sqrt{\{ r^2 - (r-e)^2 \}^3}.$$

Conséquemment, on a finalement

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi_1 = \frac{2}{\pi r^3}\Big\{ & \frac{1}{2}\pi e\,|r^2-(r-e)^2| + \frac{r^2(r-e)}{2}\,arc\cos\frac{r-e}{r} - \frac{(r-e)^2}{2}\sqrt{r^2-(r-e)^2} \\ & - \frac{1}{3}\sqrt{[r^2-(r-e)^2]^3}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Il reste encore à calculer la probabilité pour le cas où $OP = \varrho < r - e$. Le cercle décrit de P comme centre avec le rayon e est enveloppé alors par le cercle donné et toute droite qui le coupe satisfait aux conditions de la question. La probabilité y relative est donc (comp. au n° 81)

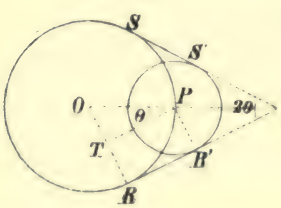
$$2)\qquad \Pi_2 = \frac{\pi\,(r-e)^2}{\pi r^2}\cdot\frac{2\pi e}{2\pi r} = \frac{\pi e\,(r-e)^2}{\pi r^3}.$$

La somme des probabilités 1) et 2) donne la probabilité totale de l'événement en question,

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi = \frac{2}{\pi r^3}\Big\{ & \frac{1}{2}\pi e r^2 + \frac{r^2(r-e)}{2}\,arc\cos\frac{r-e}{r} - \frac{(r-e)^2}{2}\sqrt{r^2-(r-e)^2} \\ & - \frac{1}{3}\sqrt{|r^2-(r-e)^2|^3}\Big\}. \\ = \frac{1}{2\pi r}\Big\{ & 2\pi e + 2(r-e)\,arc\cos\frac{r-e}{r} - 2r\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2} \\ & - \frac{4r}{3}\sqrt{\left[1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\right]^3}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Le résultat prend une forme plus élégante et plus abrégée lorsqu'on a égard à la position propre du point P (fig. 50). Le fil embrassant les deux cercles a, dans ce cas, la longueur

Fig. 50.



$$Y_0 = 2\pi r - 2r\,arc\cos\frac{r-c}{r} + 2e\,arc\cos\frac{r-e}{r} + 2\sqrt{r^2-(r-e)^2},$$

l'excès sur les deux périmètres de cercles est

$$2\pi r + 2\pi e - Y_0 = 2\pi e + 2(r-e)\,arc\cos\frac{r-e}{r} - 2\sqrt{r^2-(r-e)^2};$$

donc Π peut être présenté sous la forme suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2\pi r}\left\{2\pi r + 2\pi e - Y_0 + 2r\sqrt{1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2} - 2r\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2} - \frac{4r}{3}\sqrt{\left[1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\right]^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\left\{2\pi r + 2\pi e - Y_0 + \frac{2r}{3}\sqrt{\left[1-\left(\frac{r-e}{r}\right)^2\right]^3}\right\}$$

et si l'on introduit enfin l'angle 2θ que les deux parties rectilignes de la courroie sans fin enserrent, on obtient

$$\Pi = \frac{2\pi r + 2\pi e - Y_0}{2\pi r} + \frac{\cos^3\theta}{3\pi}.$$

Le premier terme du second membre représente la probabilité sous la condition que le point pris arbitrairement tombe sur le périmètre du cercle donné; si l'on désigne cette probabilité par Π_0, on a

4) $$\Pi = \Pi_0 + \frac{\cos^3\theta}{3\pi}.$$

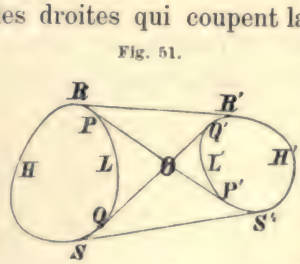
Remarque. — Le cas spécial traité au n° 90 se déduit du cas actuel, en posant $r = e$ et simultanément $\theta = 0$; en effet, on trouve alors de nouveau

$$\Pi = 1 - \frac{2}{3\pi}.$$

92. **Théorème VI**. — *La quantité des droites arbitraires qui peuvent être menées entre deux courbes fermées, convexes, extérieures l'une à l'autre, sans couper l'une d'elles, est mesurée par* X — L — L', *lorsque* X, L, L' *ont les significations introduites antérieurement* (1).

Démonstration. — La totalité des droites qui coupent la figure convexe, $RHSS'H'R'R$, (fig. 51) de longueur Y se compose des droites qui coupent L, de celles qui coupent L', et de celles qui passent entre les deux courbes. Soit N la quantité des dernières. Mais, de plus, les droites qui rencontrent en même temps LL' et dont la quantité, suivant

Fig. 51.



(1) Voir n° 83.

le nº 83, égale $X - Y$, sont comptées deux fois, savoir tant parmi les droites qui rencontrent L que parmi celles qui coupent L'. Pour établir l'égalité, ces droites qui rencontrent en même temps L et L' doivent donc être portées en déduction une fois. Ce raisonnement conduit à l'équation

$$Y = L + L' + N - X + Y;$$

de laquelle, résulte, comme il a été affirmé,

$$1) \qquad N = X - L - L'.$$

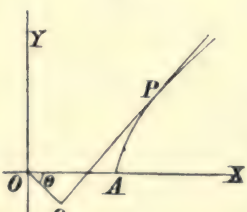
Si l'on observe que $X = PP' + QQ'$ $L - arc\ PQ + L' - arc\ P'\ Q'$, on peut écrire aussi

$$2) \qquad N = PP' + QQ' - arc\ PQ - arc\ P'Q'.$$

93. Remarque. — En vertu de la formule 2), la totalité des droites qui passe entre les deux branches d'une hyperbole est donc mesurée par la différence entre les asymptotes et les branches de l'hyperbole, laquelle différence, comme on sait, a une valeur finie.

Soit AP (fig. 52) une branche de l'hyperbole, O le centre, PQ une tangente, OQ une droite menée perpendiculairement à PQ; puis, $a = OA$ désigne le demi-axe réel, e l'excentricité relative. On pose $OQ = p$, $PQ = u$, l'angle $XOQ = \theta$; ainsi, p, u peuvent être envisagés comme de nouvelles coordonnées rectangulaires du point P de l'hyperbole, rapportées à un système de coordonnées ayant même origine que le système originaire, tourné d'un angle θ sur celui-ci; conséquemment, on a

Fig. 52.



$$p = x \cos \theta - y \sin \theta,$$
$$u = x \sin \theta + y \cos \theta;$$

puis,

$$1) \quad \frac{dp}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \cos \theta - \frac{dy}{d\theta} \sin \theta - x \sin \theta - y \cos \theta = -u,$$

$$2) \quad \frac{d^2 p}{d\theta^2} = -\frac{du}{d\theta} = -\frac{dx}{d\theta} \sin \theta - \frac{dy}{d\theta} \cos \theta - x \cos \theta + y \sin \theta = -\frac{ds}{d\theta} - p;$$

car des relations

$$\frac{dy}{dx} = cotg\,\theta \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dx} = cosec\,\theta$$

résulte

$$\frac{dx}{d\theta} cos\,\theta - \frac{dy}{d\theta} sin\,\theta = \frac{dx}{d\theta} cos\,\theta - \frac{dx}{d\theta} cotg\,\theta\, sin\,\theta = 0,$$

et

$$\frac{dx}{d\theta} sin\,\theta + \frac{dy}{d\theta} cos\,\theta = \frac{dx}{d\theta} sin\,\theta + \frac{dx}{d\theta} cotg\,\theta\, cos\,\theta = \frac{dx}{d\theta} cosec\,\theta = \frac{ds}{d\theta}.$$

On intègre l'équation 2) dans les limites 0 et θ; ainsi s'obtient, lorsqu'on désigne par s l'arc AP,

$$\frac{dp}{d\theta} = -s - \int_0^\theta p\,d\,\theta,$$

et, en considération de 1),

$$u - s = \int_0^\theta p\,d\theta.$$

L'intégrale du second membre exprime donc la différence entre QP et l'arc d'hyperbole AP. Laisse-t-on se déplacer le point P à l'infini, donc progresser θ jusqu'à la valeur $\alpha = arc\ sin \frac{1}{e}$? On obtient la différence entre une branche complète de l'hyperbole et la demi-asymptote correspondante; si l'on remplace p par l'expression connue $a\sqrt{1 - e^2\, sin^2\theta}$, la différence dite devient égale à l'intégrale

$$a \int_0^\alpha \sqrt{1 - e^2\, sin^2\,\theta}\; d\,\theta,$$

et, par conséquent, la différence entre l'hyperbole entière et les asymptotes est

3) $$\varDelta = 4a \int_0^\alpha \sqrt{1 - e^2\, sin^2\,\theta}\; d\,\theta.$$

Par les substitutions

$$e\, sin\,\theta = sin\,\varphi, \quad \frac{1}{e} = \varkappa,$$

on a

$$\int_0^\alpha \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}\, d\theta = \varkappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{E - (1 - \varkappa^2) F}{\varkappa},$$

et si l'on introduit, pour les intégrales elliptiques complètes E, F, les développements connus, finalement

$$4) \quad \Delta = 2\pi a \left\{ \frac{\varkappa}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varkappa^3}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{\varkappa^5}{6} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{\varkappa^7}{8} + \cdots \right\}.$$

94. **Problème XXX**. — *Une courbe fermée, convexe, de longueur* L *enveloppe deux courbes formées de même, extérieures l'une à l'autre, possédant les longueurs* l, l'. *Quelle est la probabilité pour qu'une droite menée arbitrairement qui coupe* L *passe entre* l *et* l' ?

Solution. — On désigne par x la longueur du fil en forme de nœud tendu autour de l et de l'; par la proposition du n° 92, est

$$p = \frac{x - l - l'}{L}.$$

Remarque. — Lorsque les deux courbes disposées à l'intérieur de L se réduisent à deux points, dont la distance est e, on obtient

$$l = l' = 0, \quad x = 2e;$$

par conséquent,

$$p = \frac{2e}{L},$$

comme cela s'obtiendrait aussi par le n° 81.

95. **Problème XXXI**. — *Trouver la probabilité pour qu'une droite menée arbitrairement qui coupe un cercle donné rencontre aussi un diamètre donné de celui-ci.*

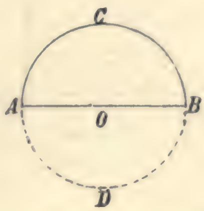
Solution. — A cette question, s'adapte le cas cité dans la remarque du n° 94. La droite coupe le diamètre AB lorsqu'elle passe entre les points A et B. Si l'on désigne le diamètre du cercle par r, $e = 2r$, donc la probabilité requise est

$$p = \frac{2}{\pi}.$$

96. **Problème XXXII**. — *Calculer la probabilité pour qu'une droite menée arbitrairement qui coupe une demi-circonférence donnée rencontre aussi la demi-circonférence complétant la circonférence entière.*

Solution. — La demi-circonférence donnée ACB (fig. 53) représente une courbe fermée, partiellement concave qui est à remplacer (n° 80) par le courbe convexe $AOBC$. Une droite qui coupe la demi-circonférence donnée rencontre aussi la complémentaire ADB, lorsqu'elle passe entre les points A et B. Dans le sens de la remarque du n° 94, on a

Fig. 53.



$$e = 2r, \quad L = \pi r + 2r;$$

par conséquent,

$$p = \frac{4}{\pi + 2}.$$

97. **Problème XXXIII**. — *Déterminer la probabilité pour que deux sécantes d'une courbe fermée, convexe, menées arbitrairement, se coupent dans l'intérieur de la courbe.*

Solution. — On désigne par N le nombre total des points d'intersection que donnent toutes les sécantes de la courbe dont la longueur est L; par Z la quantité des points d'intersection qui tombent dans la surface limitée par la courbe, dont l'aire s'appelle J. Ainsi, on a

$$1) \qquad p = \frac{Z}{N}.$$

Le nombre des sécantes est L; par conséquent, le nombre de leurs points d'intersection,

$$2) \qquad N = \frac{1}{2} L^2.$$

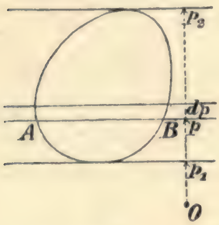
Pour découvrir Z, nous considérons les sécantes d'une direction déterminée et comptons les points d'intersection sur celles-ci en tant qu'ils sont contenus dans la surface. A cette fin, nous dégageons le groupe des sécantes mentionnées dont la distance à un pôle O (fig. 54, p. 130) se trouve entre les limites p et $p + dp$; leur nombre est dp. Sur une de ces sécantes, gisent autant de points d'intersection intérieurs qu'il y a de droites qui coupent la corde AB; c'est $2AB$;

par conséquent, sur toutes les sécantes, $2\,AB.dp$ et sur toutes les sécantes de la direction déterminée

$$\int_{p_1}^{p_2} 2\,AB\,dp = 2\,J$$

points d'intersection. Comme ce nombre est indépendant de la direction, il y a sur les sécantes de toutes les directions $2\pi J$ points d'intersection intérieurs; mais chacun est compté doublement; donc on a

Fig. 54.



3) $$Z = \pi J.$$

Par introduction des valeurs de 2) et de 3) dans 1), s'obtient finalement

4) $$p = \frac{2\pi J}{L^2}.$$

Par exemple, la probabilité pour que deux droites menées arbitrairement à travers un carré aient leur point d'intersection à l'intérieur du carré est

$$p = \frac{2\pi\ s^2}{16\ s^2} = \frac{\pi}{8},$$

et, pour un cercle, la probabilité correspondante est

$$p = \frac{2\pi^2\ r^2}{4\pi^2\ r^2} = \frac{1}{2},$$

un maximum.

Remarque. — On pose $AB = C$; l'équation 3), en considération de l'équation la précédant, peut s'écrire sous la forme

α) $$\int\int C\,dp\,d\theta = \pi J,$$

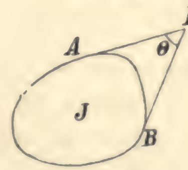
l'intégration étendue à toutes les sécantes de la courbe.

98. **Théorème VII.** — *La densité des points d'intersection réciproques de toutes les sécantes arbitraires d'une courbe fermée, convexe est constante en tous les points au dedans de la courbe, et est égale à π; en un point au dehors de la courbe, elle s'élève à θ —* sin *θ, θ indiquant l'angle sous lequel se projette la courbe du point considéré.*

Démonstration. — 1. Pour découvrir la densité des points d'intersection en un point au dedans de la courbe, nous entourons ce point d'un cercle infiniment petit ou d'une autre figure convexe d'étendue infiniment petite; soit dJ sa surface. Dans cet élément de surface, le nombre des points d'intersection divisé par dJ donne la densité requise. En vertu de l'équation 3) du nº 97, la quantité des points d'intersection de toutes les droites qui rencontrent le contour de l'élément dJ est exprimée par $\pi . dJ$; leur compacité est donc $\frac{\pi . dJ}{dJ} = \pi$, donc indépendante de la position du point, ou régulière, uniforme sur la surface entière, limitée par la courbe.

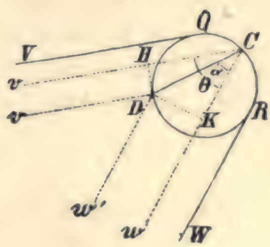
2. Une marche semblable conduit au but lors de la considération d'un point extérieur P (fig. 55a). La fig. 55b représente le cercle, à imaginer infiniment petit, qui a été marqué autour du point P; VQ, WR représentent les tangentes AP, BP de la fig. 55a; soit dJ la surface du cercle.

Fig. 55 a.



Une corde CD du cercle, menée arbitrairement, laquelle coupe par son prolongement aussi la courbe donnée, est rencontrée par autant de sécantes de cette dernière qu'il y a de droites qui coupent simultanément la courbe et CD. La quantité de ces sécantes est mesurée, d'après le nº 83, par la différence $X - Y$; dans la figure, $v'DCDw'$ est une partie de X (du fil se croisant), vCw une partie de Y (du fil extérieur), et avec l'étendue infiniment petite du cercle, vis-à-vis de son éloignement de J, vC, $v'D$, VQ, d'un côté, et $w'D$, wC, WR, de l'autre côté, peuvent valoir comme des parallèles. Sous cette supposition, on a

Fig. 55 b.



$$\omega) \qquad X - Y = 2CD - CH - CK.$$

Pour les cordes à l'intérieur d'une bande de parallèles, se rattachant à CD, de la largeur dp, la quantité des points d'intersection est par conséquent

$$dp\,(2\,CD - CH - CK) = CD\,.\,dp\,(2 - cos\,\{\theta - \alpha\} - cos\,\alpha),$$

pour toutes les cordes de la direction CD, égale

$$(2 - cos\,\{\theta - \alpha\} - cos\,\alpha)\int CD\,dp = (2 - cos\,\{\theta - \alpha\} - cos\,\alpha)\,dJ,$$

enfin, pour toutes les directions admissibles de la corde, la quantité de tous les points d'intersection tombant dans le cercle égale

$$1)\quad \frac{1}{2}\,dJ\int_0^\theta (2 - cos\,\{\theta - \alpha\} - cos\,\alpha)\,d\alpha = (\theta - sin\,\theta)\,dJ;$$

le facteur $\frac{1}{2}$ doit être introduit, parce qu'autrement chaque point d'intersection serait compté deux fois.

Par conséquent, la densité des points d'intersection en P est égale à

$$2)\qquad \delta = \frac{(\theta - sin\,\theta)\,dJ}{dJ} = \theta - sin\,\theta,$$

comme cela a été affirmé.

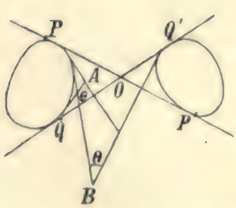
99. Remarque. — Les mêmes considérations que celles de 2) du n° 98, seraient à donner pour trouver la densité des points d'intersection réciproques de toutes les droites arbitraires qui passent entre deux courbes fermées, convexes; le résultat s'énonce aussi

$$\delta = \theta - sin\,\theta;$$

seulement, relativement à la détermination de l'angle θ, une remarque doit être faite.

Le point, duquel la densité est à découvrir, tombe-t-il dans un des triangles mixtilignes OPQ, $OP'Q'$ (fig. 56), par exemple en A? Ainsi, θ est l'angle adjacent de l'angle que les tangentes menées de A à la courbe se trouvant le plus proche enserrent. Le point, en échange, gît-il dans un des espaces infinis d'angles POQ', $P'OQ$, par exemple en B? Alors, l'angle θ vaut celui que forment les tangentes intérieures, menées de B aux deux courbes; brièvement dit, chaque fois, il faut prendre l'angle par le sommet duquel ne passent que des lignes de l'espèce indiquée plus haut.

Fig. 56.



Conformément à la proposition du n° 92, la quantité des droites passant entre les courbes est mesurée par

$$PP' + QQ' - arc\,PQ - arc\,P'Q';$$

la quantité de leurs points d'intersection réciproques est par conséquent

$$\frac{1}{2}(PP' + QQ' - arc\,PQ - arc\,P'Q')^2;$$

par cela, s'obtient la proposition remarquable suivante :

$$1)\qquad \int\!\!\int(\theta - \sin\theta)\,dJ = \frac{1}{2}(PP' + QQ' - arc\,PQ - arc\,P'Q')^2,$$

l'intégration étendue à la partie (du plan) que rencontrent les droites de l'espèce désignée préliminairement; l'angle θ compté dans le sens expliqué plus haut.

En appliquant cette formule à l'hyperbole, on obtient

$$2)\qquad \int\!\!\int(\theta - \sin\theta)\,dJ = \frac{1}{2}\Delta^2;$$

dans cette expression, Δ désigne la différence entre les deux asymptotes et les deux branches de l'hyperbole (comp. au n° 93); l'intégration a à s'étendre ici à la partie (du plan) se trouvant entre les branches de l'hyperbole.

100. **Problème XXXIV.** — *Trouver le nombre des points d'intersection extérieurs de toutes les droites arbitraires qui coupent une courbe fermée, convexe, de longueur* L *et d'aire* J.

Solution. — En conformité de la proposition du n° 98,2, la quantité de ces points d'intersection est exprimée par l'intégrale

$$\int\!\!\int(\theta - \sin\theta)\,dJ,$$

étendue à tous les éléments du plan, qui se trouvent à l'extérieur de la courbe.

D'un autre côté, la quantité de tous les points d'intersection, tant extérieurs qu'intérieurs, est $\frac{1}{2}L^2$; mais la quantité des points intérieurs, suivant l'équation 3) du n° 97, est πJ; conséquemment, la quantité des points extérieurs est $\frac{1}{2}L^2 - \pi J$.

Par là, s'obtient la remarquable proposition : " Si θ désigne „ l'angle sous lequel se projette une courbe fermée, convexe, „ de longueur L et de surface J, d'un point extérieur de son „ plan, et si dJ est l'élément du plan en ce point, on a

$$\int\int (\theta - \sin\theta) dJ = \frac{1}{2} L^2 - \pi J,$$

„ l'intégrale étendue au plan entier, considéré extérieurement „ à la courbe (¹). „

La justesse de cette proposition se laisse vérifier facilement par son application au cercle. Ici θ demeure constant pour tous les points d'un cercle concentrique au cercle donné; dJ est donc l'aire d'un anneau circulaire infiniment étroit. En nommant r le rayon du cercle donné, ϱ celui du cercle variable, on a

$$\varrho = \frac{r}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad d\varrho = -\frac{r\cos\frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}, \quad dJ = 2\pi\varrho\, d\varrho,$$

donc,

$$\int\int (\theta - \sin\theta)\, dJ = \pi r^2 \int_\pi^0 (\sin\theta - \theta) \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= \pi r^2 \int_\pi^0 \left(4\, cotg^2 \frac{\theta}{2} - 2\theta \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\right) d\frac{\theta}{2} = \pi^2 r^2,$$

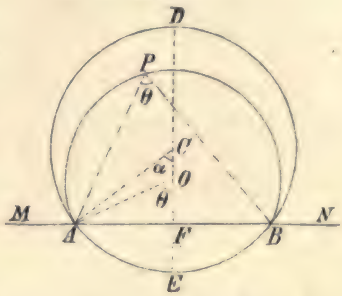
ce qui égale réellement la différence $\frac{1}{2}(2\pi r)^2 - \pi.\pi r^2$.

(¹) Crofton a fait la première communication de cette belle proposition à l'Académie de Paris en 1867 (v. Comptes rendus, tome 65, pag. 994 et 995). Une démonstration analytique de celle-ci, faite par Serret, se trouve dans les " Annales scientif. de l'école norm. supérieure „, VI (1869), pag. 177 à 185 (aussi dans les Comptes rendus, 1869, pag. 1132 à 1137). Serret part d'un polygone convexe, rectiligne, d'un nombre quelconque de côtés et parvient par une voie intéressante, quoique circonstanciée, au résultat ci-dessus mentionné, qu'il étend aussi au cas du contour composé de parties curvilignes et rectilignes.

101. **Problème XXXV.** — *Trouver la probabilité pour que les points d'intersection réciproques de trois sécantes d'un cercle, menées arbitrairement, se trouvent à l'intérieur du cercle.*

Solution. — Soit C (fig. 57) le centre du cercle donné, $AC = c$ son rayon. Nous mettons en relief MN, quelqu'une des sécantes. La quantité des tri-sécantes favorables, auxquelles appartient MN, est égale à la quantité des couples de droites, qui, coupant la corde AB, ont leur point d'intersection à l'intérieur du cercle donné, et cette quantité, conformément à la proposition du n° 98,2, est exprimée par l'intégrale suivante étendue à l'aire du cercle donné :

Fig. 57.



$$\int\int (\theta - \sin\theta)\, dJ.$$

Comme θ, en tous les points d'un arc de cercle passant par A, B, demeure constant, nous nous représentons le cercle donné décomposé en éléments par des arcs de cercle tels que APB. Un pareil élément a la grandeur

$$dJ = d\,.\, segm\, ABP.$$

Si maintenant O est le centre de l'arc APB, $AO = \varrho$ son rayon, $AB = 2a$, on a

$$segm\, ABP = (\pi - \theta)\,\varrho^2 + a\varrho \cos\theta = a^2\left(\frac{\pi - \theta}{\sin^2\theta} + \cot g\,\theta\right),$$

d'où,

$$dJ = -\frac{2a^2}{\sin^2\theta}\left\{ 1 + (\pi - \theta)\cot g\,\theta \right\} d\theta.$$

Par conséquent, la quantité des tri-sécantes appartenant à MN, desquelles le troisième point d'intersection gît AU-DESSUS de MN, est

$$N_1 = -\int_{\pi}^{\alpha} \frac{2a^2}{sin^2\theta}(\theta - sin\,\theta)\{1 + (\pi - \theta)\,cotg\,\theta\}d\theta = 2a^2 \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\theta - sin\,\theta}{sin^2\theta}\{1 + (\pi - \theta)\,cotg\,\theta\}d\theta$$

$$= 2a^2 \int_{\alpha}^{\pi} \left(\frac{\theta}{sin^2\theta} + \pi\frac{\theta\,cos\,\theta}{sin^3\theta} - \frac{\theta^2\,cos\,\theta}{sin^3\theta} - \frac{1}{sin\,\theta} - \pi\frac{cos\,\theta}{sin^2\theta} + \frac{\theta\,cos\,\theta}{sin^2\theta}\right)d\,\theta.$$

Par l'exécution des intégrations individuelles, tout d'abord sans considération de limites, on obtient l'expression

$$-\frac{\pi\,\theta}{2\,sin^2\theta} - \frac{\pi}{2}\,cotg\,\theta + \frac{\theta^2}{2\,sin^2\theta} + \frac{\pi}{sin\,\theta} - \frac{\theta}{sin\,\theta} = \frac{\pi - \theta}{sin\,\theta} + \frac{\theta^2 - \pi\,\theta - \frac{1}{2}\pi\,sin\,2\,\theta}{2\,sin^2\theta},$$

dont les deux parties pour la limite la plus élevée prennent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; mais le premier terme composant,

$$\frac{\pi - \theta}{sin\,\theta} = \frac{\pi - \theta}{sin\,(\pi - \theta)} = \frac{\delta}{sin\,\delta},$$

tend vers la limite 1, par δ diminuant vers zéro, pendant que le second terme composant a la valeur limite $\frac{1}{2}$, comme on le trouve facilement par la différentiation deux fois du numérateur et du dénominateur. Donc est

$$1)\quad N_1 = 2a^2\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi - \alpha}{sin\,\alpha} + \frac{\pi\,\alpha - \alpha^2 + \frac{1}{2}\pi\,sin\,2\alpha}{2\,sin^2\alpha}\right).$$

La quantité N_2 des tri-sécantes favorables, dont le troisième point d'intersection gît AU-DESSOUS de MN, se donne manifestement lorsqu'on remplace dans l'expression précisément écrite α par $\pi - \alpha$. La somme $N_1 + N_2$ fournit la quantité de toutes les tri-sécantes favorables appartenant à MN, savoir

$$2)\quad N = 2a^2\left(3 - \frac{\pi}{sin\,\alpha} + \frac{\pi\,\alpha - \alpha^2}{sin^2\alpha}\right) = 2c^2(3\,sin^2\alpha - \pi\,sin\,\alpha + \pi\,\alpha - \alpha^2).$$

Pour obtenir maintenant la quantité de toutes les tri-sécantes favorables qui en soi renferment une droite parallèle à MN, on a à multiplier N par la différentielle de CF, c'est-à-dire par $c\,sin\,\alpha\,d\,\alpha$ et à intégrer le produit par rapport à α

entre les limites 0 et π, qui correspondent aux deux positions extrêmes de MN. Pour recueillir TOUTES LES DIRECTIONS de MN, donc pour obtenir la quantité de TOUTES les tri-sécantes favorables, l'expression acquise est à multiplier par π, d'autre part à diviser par 3, parce que dans la marche suivie chaque tri-sécante est comptée trois fois, alors que chaque sécante de celle-ci ne joue qu'une fois le rôle de MN. Par conséquent, le nombre total des cas favorables est

$$3)\quad Z = \frac{2\pi c^3}{3}\int_0^\pi (3\sin^2\alpha - \pi\sin\alpha + \pi\alpha - \alpha^2)\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\pi c^3}{3}(16 - \pi^2).$$

La quantité des tri-sécantes possibles et différentes est

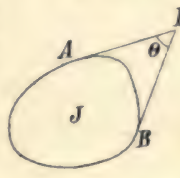
$$4)\quad M = \frac{1}{6}(2\pi c)^3 = \frac{4}{3}\pi^3 c^3;$$

la probabilité requise, donc

$$5)\quad p = \frac{Z}{M} = \frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{4}.$$

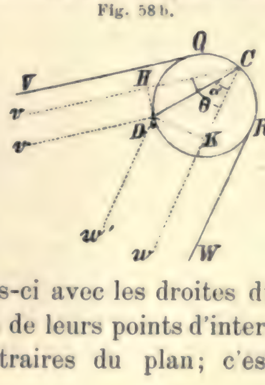
102. **Théorème VIII.** — *La densité des points d'intersection de toutes les sécantes arbitraires d'une courbe fermée, convexe avec la totalité des droites arbitraires dans le plan illimité, qui ne coupent pas la courbe, s'élève, en un point à l'extérieur de la courbe, à 2 sin θ, θ indiquant l'angle sous lequel la courbe se projette du point; en tout point à l'intérieur de la courbe, la densité, se comprenant de soi-même, est égale à zéro.*

Fig. 58 a.



Démonstration.—Nous entourons le point considéré P (fig. 58 a) d'un cercle d'étendue infiniment petite (fig. 58 b) et comptons les points d'intersection de l'espèce décrite, qui tombent dans ce cercle.

Fig. 58 b.



La corde CD fait partie d'une des droites du premier système; la quantité des points d'intersection de celles-ci avec les droites du second système est égale à la quantité de leurs points d'intersection avec toutes les droites arbitraires du plan; c'est

$2CD$, à diminuer de la quantité des points d'intersection qu'il donne avec les droites du premier système même, et celle-ci s'élève, d'après l'équation ω) du n° 98, à $2CD - CH - CK$; conséquemment s'obtiennent sur CD

$$2CD-(2CD-CH-CK)=CH+CK=CD[\cos\alpha+\cos(\theta-\alpha)]$$

points d'intersection; par suite, sur les cordes d'une bande de parallèles infiniment étroite se serrant à CD, de la largeur dp,

$$[\cos\alpha + \cos(\theta - \alpha)]\ CD\,.\,dp$$

points d'intersection; et sur toutes les cordes de la direction CD,

$$[\cos\alpha+\cos(\theta-\alpha)]\int CD\,dp = [\cos\alpha + \cos(\theta-\alpha)]\,dJ$$

points d'intersection, en désignant par dJ la surface du cercle. Toutes les cordes du cercle, qui font partie des droites du premier système, fournissent par conséquent avec les droites du second système, des points d'intersection dans la quantité

$$1)\qquad dJ\int_0^\theta [\cos\alpha + \cos(\theta-\alpha)]\,d\alpha = 2\sin\theta\,.\,dJ,$$

donc de la compacité

$$2)\qquad \delta = \frac{2\sin\theta\,.\,dJ}{dJ} = 2\sin\theta.$$

La quantité des points d'intersection qui tombent sur une partie limitée d'une manière quelconque du plan est exprimée par l'intégrale

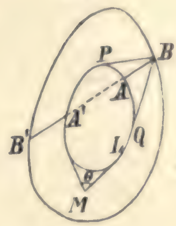
$$2\int\int \sin\theta\,dJ$$

étendue à cette partie. L'intégration n'est exécutable que pour certaines formes; le cas suivant, en permettant le dénombrement des points d'intersection par un autre moyen, conduira à une formule générale de cette intégrale.

103. **Problème XXXVI.** — *Une courbe fermée, convexe, de longueur* L *est entourée par une seconde courbe de même nature, provenant de ce qu'on pose autour de la première un fil sans fin de la longueur* Y > L *et de ce qu'un style est conduit de telle manière qu'il tend le fil incessamment. Découvrir le nombre des points d'intersection que donnent les sécantes arbitraires de* L *avec toutes les droites arbitraires du plan qui ne coupent pas* L, *sur la surface annulaire limitée par les deux courbes.*

Solution. — Nous considérons la corde AB (fig. 59) de la surface annulaire; cette corde est une partie intégrante d'une sécante de L; elle donne, avec TOUTES les droites arbitraires du plan, $2AB$ points d'intersection; avec les droites qui coupent L, elle fournit $X - Y$ de ceux-ci, X signifie dans cette évaluation la longueur du fil sans fin, embrassant AB et L; donc, on a

Fig. 59.



$$X = A'PABAQA' = L + 2AB;$$

par conséquent, AB donne, avec les droites qui ne coupent pas L,

$$2AB - (X - Y) = 2AB - (L + 2AB - Y) = Y - L$$

points d'intersection. Cette quantité est donc la même pour toutes les positions de AB; par conséquent est valable aussi pour $A'B'$, de sorte que sur chaque sécante de L se trouvent

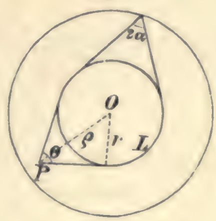
$$2(Y - L)$$

points d'intersection; sur toutes les sécantes, dont la quantité est L, par conséquent

$$2L(Y - L)$$

points d'intersection. D'un autre côté, cette quantité, en conformité de la proposition précédente, est égale à l'intégrale étendue à la surface annulaire

Fig. 60.



$$2\int\int \sin\theta\, dJ;$$

de manière que sous les conditions stipulées dans le texte

$$\omega)\quad \int\int \sin\theta\, dJ = L(Y - L).$$

104. La formule ω) peut être vérifiée par son application au cercle. Ici, θ demeure constant pour tous les points P (fig. 60) qui possèdent la même distance ϱ de O; par conséquent, un anneau circulaire de la largeur $d\varrho$ peut être pris pour dJ. Maintenant, on a

$$\varrho = \frac{r}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad d\varrho = -\frac{r\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\,\frac{\theta}{2},$$

d'où

$$\sin\theta\, dJ = 2\pi\varrho \sin\theta\, d\varrho = -4\pi r^2 \cot g^2 \frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2};$$

par conséquent, on a

$$\int\!\!\int \sin\theta\, dJ = 4\pi r^2 \int_{2\alpha}^{\pi} \cot g^2 \frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2} = 4\pi r^2 \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \cot g \frac{\theta}{2} \right\}_{2\alpha}^{\pi}$$

$$= 2\pi r \left\{ 2r \cot g\, \alpha - r(\pi - 2\alpha) \right\}.$$

Comme

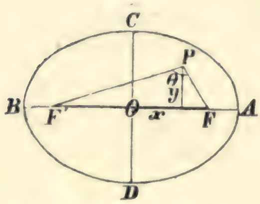
$$L = 2\pi r,\ Y = 2\pi r - r(\pi - 2\alpha) + 2r \cot g\, \alpha,$$

$$Y - L = 2r \cot g\, \alpha - r(\pi - 2\alpha),$$

la valeur de l'intégrale devient réellement égale à $L(Y - L)$.

105. L'application de la formule ω) à une droite délimitée FF' (fig. 61), de longueur $2c$, cette droite étant envisagée comme courbe fermée, convexe, de longueur $4c$, conduit à une intéressante proposition. Dans ce cas, la courbe engendrée par l'utilisation d'un fil de longueur $Y = 2c + 2a$ est une ellipse, pour laquelle les points terminaux F, F' de la droite délimitée, jouent le rôle de foyers, et dont le grand axe possède la longueur $2a$. L'intégrale $\int\!\!\int \sin\theta\, dJ$, étendue à la surface de cette ellipse, a, conformément à la formule citée, la valeur $4c\,(2c + 2a - 4c) = 8c(a - c)$, ou c'est l'intégrale

Fig. 61.



$$\int\!\!\int \sin\theta\, dx\, dy = 8c\,(a - c),\ [1]$$

étendue à la surface entière de l'ellipse.

106. **Théorème IX**. — *La densité des points d'intersection de toutes les sécantes arbitraires d'une courbe fermée, convexe avec la totalité de toutes les droites arbitraires du plan illimité, s'élève, en un point à l'intérieur de la courbe, à 2π; en un point à l'extérieur de la courbe à 2θ; θ désignant l'angle sous lequel la courbe se projette du point.*

Démonstration. — 1. On décrit, autour d'un point quelconque à l'intérieur de la courbe, un cercle infiniment petit,

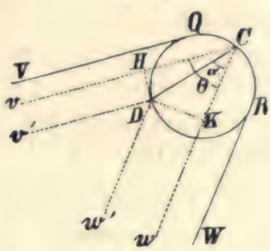
[1] Une démonstration directe de cette formule a été donnée par E. B. Elliott dans le tome XXVI de l'Éduc. Tim., pag. 79 et pages suivantes.

dont la surface est dJ; toutes les sécantes du cercle conçues comme sécantes de la courbe, avec toutes les droites arbitraires du plan, à l'intérieur du cercle, fournissent $2\pi dJ$ points d'intersection [v. au n° 97 l'alinéa précédant l'équation 3)]; leur densité est donc

$$1) \qquad \delta_1 = 2\pi.$$

2. Comme antérieurement, la figure 62 peut représenter le cercle qui entoure le point considéré P; VQ, WR représentent les tangentes menées de P à la courbe, tangentes dont l'angle d'inclinaison est θ. La corde CD fait partie d'une droite du premier système, c'est-à-dire d'une droite qui coupe la courbe; le nombre de ses points d'intersection avec les droites du second système, c'est-à-dire avec toutes les droites arbitraires du plan, est $2CD$; pour toutes les cordes parallèles à CD, ce nombre est

Fig. 62.



$$2\int CD\,dp = 2dJ,$$

et pour les cordes de toutes les directions admissibles $2\theta dJ$, de sorte que la densité des points d'intersection égale

$$2) \qquad \delta_2 = 2\theta.$$

1. Remarque. — La deuxième partie de la présente proposition peut être déduite aussi des deux propositions du n° 98 et du n° 102. Les points d'intersection que forment les sécantes de la courbe avec toutes les droites arbitraires du plan se divisent en deux groupes : celui formé avec les droites qui rencontrent la courbe et celui formé avec les droites qui ne coupent pas la courbe. La quantité des premiers points, d'après l'équation 1) du n° 98, est

$$2\,(\theta - \sin\theta)\,dJ;$$

le facteur $\frac{1}{2}$ qui était placé là à gauche, parce qu'il s'agissait des intersections réciproques des droites d'un système, est omis ici, parce qu'il s'agit de l'intersection de deux différents systèmes de droites. La quantité des points d'intersection de la deuxième espèce, d'après l'équation 1) du n° 102, est

$$2 \sin \theta \, dJ;$$

par conséquent, la somme des deux quantités est

$$2 \, \theta \, dJ,$$

comme plus haut.

2. Remarque. — La quantité des points d'intersection de l'espèce ici analysée, qui tombent sur une partie donnée du plan à l'extérieur de la courbe, est exprimée par l'intégrale

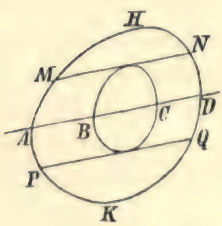
$$2 \int \int \theta \, dJ,$$

étendue à cette partie. L'évaluation de cette intégrale réussit cependant seulement dans des cas particuliers. Une formule générale pour elle est donnée par le cas suivant, dans lequel le dénombrement des points d'intersection est exécutable d'une autre manière.

107. **Problème XXXVII.** — *Une courbe fermée, convexe est renfermée dans une autre courbe fermée, convexe, de figure quelconque. Découvrir la quantité des points d'intersection que donnent les sécantes de la première courbe avec toutes les droites arbitraires du plan sur la surface annulaire limitée par les deux courbes.*

Solution. — Nous considérons une sécante quelconque AD (fig. 63) de la courbe intérieure; la quantité des points d'intersection, de l'espèce décrite, déposés sur la sécante, est $2(AB + CD)$; conséquemment, il y a sur toutes les sécantes parallèles à AD

Fig. 63.



$$2 \int (AB + CD) \, dp$$

$$= 2 \, (\Theta - segm \; MNH - segm \; PQK)$$

points d'intersection et sur toutes les sécantes

$$N = 2 \int_0^\pi (\Theta - segm \; MNH - segm \; PQK) \, d\varphi$$

points d'intersection, lorsque Θ désigne la surface de l'anneau et φ l'angle qu'enserre MN avec une direction fixe. Par amplification, on obtient premièrement

$$N = 2\pi \Theta - 2 \int_0^\pi (segm \; MNH + segm \; PQK) \, d\varphi;$$

mais la deuxième partie du second membre peut être obtenue ainsi : au lieu de tourner les DEUX tangentes MN, PQ dans l'intervalle o à π, on ne tourne qu'UNE, par exemple MN, dans l'intervalle o à 2π, parce qu'elle prend alors toutes les positions qu'a prises antérieurement PQ. Par conséquent, si l'on désigne la surface du segment MNH par Σ, après cette observation, on a

$$N = 2\pi\Theta - 2\int_0^{2\pi}\Sigma\, d\varphi.$$

D'un autre côté, à raison du n° 106, 2^e remarque, on a

$$N = 2\int\int\theta\, dx\, dy;$$

sous les conditions établies dans le texte, la relation remarquable suivante existe donc :

$$\text{1)} \qquad \int\int\theta dx\, dy = \pi\Theta - \int_0^{2\pi}\Sigma\, d\varphi.$$

Un cas spécial, intéressant se présente lorsque le segment MNH découpé par la tangente MN a une superficie constante; alors, il vient

$$\int\int\theta\, dx\, dy = \pi\Theta - 2\pi\Sigma = \pi\,(\Theta - 2\,\Sigma),$$

et comme $MNH = PQH = \Sigma$, $\Theta - 2\Sigma$ indique la différence des deux parties en lesquelles l'anneau est décomposé par la tangente MN; d'où suit la proposition: „ Lorsque deux courbes fermées. convexes, quelconques, dont l'une enveloppe l'autre, se tiennent en telle liaison que toute tangente menée à la courbe intérieure découpe de la surface de la courbe extérieure la même surface partielle; lorsque θ est l'angle sous lequel la courbe intérieure se projette d'un point extérieur x, y; lorsqu'enfin Δ est la différence des parties en lesquelles la surface annulaire constituée par les deux courbes est divisée par une tangente à la courbe intérieure; la relation

$$\text{2)} \qquad \int\int\theta\, dx\, dy = \pi\Delta$$

existe, l'intégration étendue à la surface de l'anneau. „

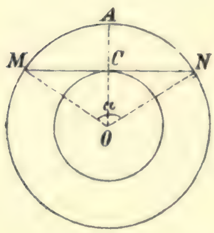
La conjoncture admise ici a lieu avec deux cercles concentriques, par conséquent aussi avec deux ellipses concentriques, semblables et semblablement placées, parce que ces dernières peuvent être envisagées comme la projection parallèle des premiers et, comme dans ce cas $\varDelta$ peut être déduit par la voie élémentaire, la proposition susdite conduit à la valeur d'une intégrale définie, dont l'évaluation ne serait pas aussi aisée par la voie directe.

C'est-à-dire que si l'on rapporte les deux ellipses, dont les demi-axes peuvent être a, b; $\varkappa a$, $\varkappa b$ $(\varkappa > 1)$, à leurs axes comme axes cordonnés, on obtient tout d'abord

$$3) \qquad \theta = arc\,tang\,\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{x^2+y^2-a^2-b^2}.$$

Les deux cercles (fig. 64), dont les ellipses peuvent être dérivées, ont les rayons a et $\varkappa a$; on mène au cercle intérieur une tangente MN; la différence des parties en lesquelles elle décompose l'anneau est

Fig. 64.



$$\varDelta' = \pi(\varkappa^2a^2-a^2) - 2\,segm\,MNA = \pi(\varkappa^2a^2-a^2)$$
$$-2\left(\varkappa^2a^2\frac{\alpha}{2}-\varkappa^2a^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=\varkappa^2a^2\left\{\pi\left(1-\frac{1}{\varkappa^2}\right)-\alpha+\sin\alpha\right\},$$

ou, parce que $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{CO}{ON}=\frac{1}{\varkappa}$, aussi

$$\varDelta' - \varkappa^2\,a^2\left(\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\alpha+\sin\alpha\right);$$

le transfert aux ellipses résulte de la multiplication par $\frac{b}{a}$; par conséquent, pour celles-ci, on a

$$4) \qquad \varDelta = \varkappa^2\,ab\left(\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\alpha+\sin\alpha\right).$$

Par l'introduction des valeurs 3) et 4) dans la formule 2) de la proposition formulée plus haut, on obtient

$$5) \quad \int\!\!\int arc\,tg\,\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{x^2+y^2-a^2-b^2}\,dx\,dy = \pi\varkappa^2ab\left\{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}-\alpha+\sin\alpha\right\},$$

où $\alpha = 2\,arc\cos\frac{1}{\varkappa}$ et l'intégration est à étendre à la surface de l'anneau.

Pour $x^2 = 2$, devient $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et est

$$\int\int arc\, tang \frac{2\sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2} dx\, dy = 4\pi a b,$$

c'est-à-dire égale la surface de l'ellipse extérieure.

108. **Théorème X**. — *La densité des points d'intersection de toutes les sécantes arbitraires d'une courbe fermée, convexe avec toutes les sécantes d'une seconde courbe, de constitution semblable, enveloppant la première, en un point à l'intérieur de la première courbe s'élève à* 2π, *en un point entre les deux courbes à* 2θ, *en un point à l'extérieur de la seconde courbe à* $u_{\theta+\varphi} + u_{\theta+\psi} - u_\varphi - u_\psi$, *lorsque* θ *désigne l'angle sous lequel la courbe intérieure se projette du point correspondant,* φ, ψ *les angles sous lesquels l'anneau se projette du point correspondant et lorsqu'enfin, par abréviation, on pose* $\alpha - \sin\alpha = u_\alpha$.

Démonstration. — 1. On trace autour du point à l'intérieur de la première courbe un cercle infiniment petit de superficie dJ; toutes les sécantes de celui-ci, interprétées comme des sécantes de la courbe intérieure, avec toutes les sécantes de la courbe extérieure, ou ce qui est la même chose, avec toutes les droites arbitraires du plan, donnent, d'après l'alinéa avant l'équation 3) du n° 97, $2\pi dJ$ points d'intersection sur la surface du cercle; leur densité est donc

1) $$\delta_1 = 2\pi.$$

2. La densité des points d'intersection de toutes les sécantes de la courbe intérieure avec toutes les sécantes de la courbe extérieure, en un point de la surface annulaire, est derechef identique à la densité des points d'intersection des premières avec TOUTES les droites arbitraires du plan; par conséquent, suivant le n° 106,

2) $$\delta_2 = 2\theta.$$

3. Sur une surface de cercle infiniment petite, de superficie dJ, entourant le point P (fig. 65, pag. 146), on compte les points d'intersection RÉCIPROQUES des sécantes de la figure

convexe $ACHDFA$; leur quantité, conformément à l'équation 1) du n° 98, égale

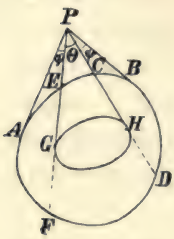
$$[(\theta + \varphi) - \sin(\theta + \varphi)]\, dJ = u_{\theta + \varphi}\, dJ;$$

puis on compte les points d'intersection RÉCIPROQUES des sécantes de la figure convexe $BEGFDB$; leur quantité s'élève à

$$[(\theta + \psi) - \sin(\theta + \psi)]\, dJ = u_{\theta + \psi}\, dJ;$$

ainsi, les points d'intersection réciproques des sécantes de la figure convexe $EGFDHCE$ sont comptés deux fois; mais ils doivent réellement se trouver deux fois dans la quantité cherchée, puisque chaque sécante de la figure indiquée en dernier lieu est à concevoir avec deux qualités, comme sécante de la courbe intérieure et comme sécante de la courbe extérieure; mais, parmi les points d'intersection comptés plus haut, se trouvent des points qui ne font pas partie des points en question; ce sont les points d'intersection réciproques des sécantes des deux figures convexes $AEGFA$ et $BCHDB$; leurs quantités sont

Fig. 65.



$$(\varphi - \sin\varphi)\, dJ = u_{\varphi}\, dJ,$$

$$(\psi - \sin\psi)\, dJ = u_{\psi}\, dJ.$$

Conséquemment, la densité des points d'intersection en P, en réalité, est égale à

$$3) \qquad \delta_3 = u_{\theta + \varphi} + u_{\theta + \varphi} - u_{\varphi} - u_{\psi}.$$

1. REMARQUE. — Sur le périmètre de la courbe intérieure, est $\theta = \pi$; par suite,

$$\delta_2 = 2\pi = \delta_1;$$

sur le périmètre de la courbe extérieure, est $\varphi + \theta + \psi = \pi$; par conséquent,

$$\delta_3 = \theta + \varphi - \sin(\theta + \varphi) + \theta + \psi - \sin(\theta + \psi)$$
$$- \varphi \quad \sin\varphi - \psi + \sin\psi = 2\theta = \delta_2,$$

parce qu'on a $\sin(\theta + \varphi) = \sin\psi$, $\sin(\theta + \psi) = \sin\varphi$; le passage de δ_3 à δ_2 et de δ_2 à δ_1 résulte donc de manière continue.

2. REMARQUE. — Si L désigne la longueur, J la surface de la courbe intérieure, L' la longueur de la courbe extérieure,

la quantité de tous les points d'intersection est LL'; de ceux-ci, $\delta_1 J = 2\pi J$ se trouvent à l'intérieur de la courbe intérieure; la quantité des points restants est donc $LL' - 2\pi J$. D'un autre côté, la dernière quantité est exprimée par

$$\int\int \delta_2\, dJ + \int\int \delta_3\, dJ,$$

la première intégration étendue à l'anneau, la seconde au plan entier au delà de L'. Donc se constitue l'équation remarquable suivante :

4) $$2\int\int \theta\, dJ + \int\int (u_{\theta+\varphi} + u_{\theta+\psi} - u_{\varphi} - u_{\psi})\, dJ = LL' - 2\pi J.$$

109. **Problème XXXVIII.** — *Dans chaque cercle de deux cercles concentriques, dont les rayons sont* a *et* $\varkappa$a($\varkappa > 1$), *une sécante arbitraire est menée. Trouver la probabilité pour que le point d'intersection des deux droites produites se trouve sur la surface du cercle intérieur, sur la surface annulaire, à l'extérieur des deux cercles.*

Solution. — Des $LL' = 4\pi^2 \varkappa a^2$ points d'intersection de toutes les sécantes des deux cercles, conformément à la proposition ci-dessus mentionnée, tombent

$$2\pi J = 2\pi^2 a^2$$

points d'intersection sur la surface du cercle intérieur,

$$2\int\int \theta\, dJ = 2\pi\, \varkappa^2 a^2 \left(\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin\alpha\right)$$

sur la surface annulaire (v. le n° 107), conséquemment

$4\pi^2 \varkappa a^2 - 2\pi^2 a^2 - 2\pi^2 \varkappa^2 a^2 \left(\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin\alpha\right)$ à l'extérieur des deux cercles; les probabilités respectives sont donc

$$p_1 = \frac{1}{2\varkappa},$$

$$p_2 = \frac{\varkappa}{2\pi}\left(\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin\alpha\right), \quad \left(\alpha = 2 \arccos \frac{1}{\varkappa}\right),$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2.$$

Remarque. — Pour $\varkappa^2 = 2$, on obtient

$$p_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}3535\ldots, \quad p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = 0{,}2251\ldots, \quad p_3 = 0{,}4214\ldots$$

Lorsque $\varkappa = 1$, les deux cercles coïncident; les formules ci-dessus donnent alors

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{2},$$

s'accordant avec le n° 97.

110. **Tangentes d'une courbe plane.** — La notion d'une tangente menée arbitrairement permet diverses interprétations; la notion est seulement arrêtée quand le mode de formation de la tangente est indiqué plus amplement.

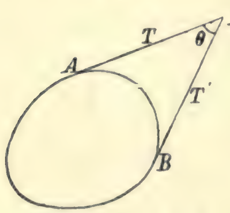
Les deux interprétations le plus présentes consistent en ce qu'on suppose le point de contact pris arbitrairement, ou la direction de la tangente, quelconque.

Les points de contact des tangentes du premier mode sont répartis uniformément sur la courbe; ils la décomposent en éléments également grands.

Les directions des tangentes du second mode sont réparties uniformément sur le domaine entier de la direction; elles forment des angles de contingence également grands.

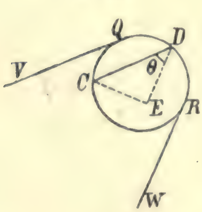
111. **Théorème XI.** — *La densité des points d'intersection de toutes les tangentes qui peuvent être menées dans une direction quelconque à une courbe fermée, convexe, en un point à l'extérieur de la courbe, s'élève à $\frac{\sin\theta}{TT'}$, lorsque θ est l'angle sous lequel la courbe se projette de ce point, et lorsque T, T′ désignent les longueurs des tangentes qui sont menées de ce point à la courbe.*

Fig. 66a.



Démonstration. — La fig. 66b représente le cercle tracé autour du point P (fig. 66a); VQ, WR représentent les tangentes PA, PB de la fig. 66a.

Fig. 66 b



Les tangentes de la courbe, qui coupent ce cercle, peuvent être séparées en deux groupes : 1° celles dont les points de contact se trouvent à proximité immédiate du point A (fig. 66a); à l'intérieur du cercle infiniment petit, elles peuvent être supposées parallèles à VQ; 2° celles dont les points de contact se trouvent à proximité immédiate du point B; elles peuvent, pour le même motif, être envisagées comme parallèles à WR.

Si l'on désigne par ϑ l'angle de contingence, exprimé en mesure d'arc, infiniment petit, constant, des tangentes voisines de la courbe, les tangentes du premier groupe, à l'intérieur du cercle, comme elles possèdent ici la distance T au point de contact, ont la distance réciproque $T\vartheta$, les tangentes du second groupe la distance $T'\vartheta$.

La corde CD (fig. 66b) est une partie d'une tangente du premier groupe; pour compter les tangentes du second groupe, qui coupent CD, on mène DE parallèlement à WR, CE perpendiculairement à WR; la quantité mentionnée est alors

$$\frac{CE}{T'\vartheta} = \frac{CD \sin\theta}{T'\vartheta};$$

par conséquent, la quantité de tous les points d'intersection à l'intérieur du cercle,

$$\frac{\sin\theta}{T'\vartheta}\,\Sigma CD;$$

mais comme

$$\Sigma CD \,.\, T\vartheta = dJ = T\vartheta\,\Sigma CD,$$

lorsque dJ désigne la surface du cercle, ainsi s'écrit la quantité susdite aussi sous la forme

$$\alpha) \qquad \frac{1}{\vartheta^2}\,\frac{\sin\theta}{TT'}\,dJ,$$

la densité des points d'intersection est exprimée donc, avec élimination du facteur constant $\frac{1}{\vartheta^2}$, par

$$1) \qquad \delta = \frac{\sin\theta}{TT'}.$$

112. **Problème XXXIX**. — *Trouver la quantité des points d'intersection réciproques de toutes les tangentes qui peuvent être menées à une courbe fermée, convexe, dans des directions quelconques, à l'intérieur d'une partie donnée du plan.*

Solution. — La question trouve sa solution générale dans l'intégrale

$$\int\!\!\int \frac{\sin\theta}{TT'}\,dJ,$$

étendue à la partie relative du plan. La considération de quelques cas spéciaux conduira à des formules remarquables de cette intégrale.

113. — 1. La totalité de toutes les tangentes de la courbe est mesurée par 2π, puisque leurs directions, dans l'intervalle 0 à 2π, sont à concevoir réparties uniformément; la quantité de leurs points d'intersection est donc $\frac{1}{2}(2\pi)^2 = 2\pi^2$; par suite est

$$1) \qquad \int\int \frac{\sin\theta}{TT'} dJ = 2\pi^2,$$

l'intégrale étendue au plan entier à l'extérieur de la courbe.

Par application de la formule au cercle, est (fig. 67)

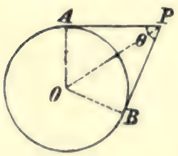
$$T = T' = r\, cotg\, \frac{\theta}{2}, \quad dJ = 2\pi\, OP.d\, OP = \pi r^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta,$$

par conséquent, en réalité,

$$\int\int \frac{\sin\theta}{TT'} dJ = \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r^2\, cotg^2\frac{\theta}{2}}\, \pi r^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta = 2\pi \int_0^\pi d\theta = 2\pi^2.$$

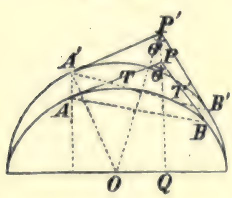
Par application de la formule 1) à l'ellipse, s'obtient la valeur d'une intégrale définie, dont l'évaluation, par une autre voie, ne serait pas aussi simple.

Fig. 67.



A l'aide du cercle tracé sur le grand axe comme diamètre (fig. 68), s'obtiennent, lorsque x, y sont les coordonnées du point P considéré, pour les coordonnées du point associé P', $x, \frac{a}{b}y$; puis est

Fig. 68.



$$P'A'.P'B' = P'A'^2 = \frac{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}{b^2},$$

$$\sin\frac{\theta'}{2} = \frac{a}{OP'} = \frac{ab}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}},$$

$$\sin\theta' = \frac{2ab\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}{b^2x^2 + a^2y^2},$$

par conséquent,

$$\Delta A'B'P' = \frac{a}{b}\frac{(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2x^2 + a^2y^2}.$$

Maintenant est

$$\Delta ABP = \frac{1}{2} TT' \sin\theta = \frac{b}{a} \Delta A'B'P',$$

par conséquent, avec utilisation de la valeur trouvée de $\Delta A'B'P'$,

$$\frac{\sin\theta}{TT'} = \frac{\sin^2\theta}{2} \cdot \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ensuite s'obtient par

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{2\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}$$

(v. le n° 107, équation 1), la valeur de $\sin^2\theta$, savoir

$$\sin^2\theta = \frac{4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)}{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2},$$

de manière que, finalement,

$$\frac{\sin\theta}{TT'} = \frac{2(b^2x^2 + a^2y^2)}{\{(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2\}\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}.$$

Il vient donc

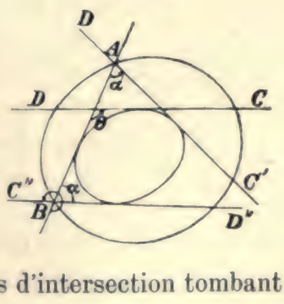
$$\iint \frac{b^2x^2 + a^2b^2}{\{(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2\}\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}\, dx\, dy = \pi^2,$$

lorsque l'intégration est étendue au plan entier à l'extérieur de l'ellipse.

114. — 2. Compter les points d'intersection sur la partie du plan, renfermée entre la courbe donnée et une courbe enveloppant celle-ci, le long de laquelle courbe enveloppante, θ possède une valeur constante α.

Si l'on considère une tangente AB (fig. 69) de la courbe intérieure, on reconnaît facilement que la dite tangente est coupée dans l'étendue AB par toutes les tangentes telles que CD, qui avec elle enserrent un angle θ, renfermé entre les limites α et $2\pi - \alpha$; la quantité de pareilles tangentes est $2\pi - \alpha - \alpha = 2(\pi - \alpha)$; la quantité des tangentes AB est 2π; par conséquent, la quantité des points d'intersection tombant sur la surface annulaire est $\frac{1}{2} \cdot 2\pi . 2(\pi - \alpha) = 2\pi(\pi - \alpha)$.

Fig. 69.



Par suite est

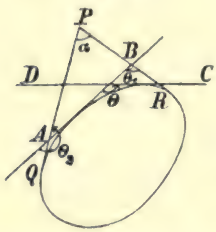
$$\text{2)} \qquad \int\int \frac{\sin\theta}{TT'}\, dJ = 2\pi\,(\pi - \alpha),$$

lorsque l'intégration est étendue à la surface annulaire.

115. — 3. Compter les points d'intersection sur la partie du plan, qui est enveloppée par la courbe et par deux tangentes fixes de celle-ci; ces tangentes forment l'angle α.

AB (fig. 70) est une des tangentes traversant le triangle mixtiligne formé par la courbe et par les tangentes fixes PQ, PR; cette tangente est atteinte dans l'étendue AB par chaque tangente qui avec elle, comme CD, enserre un angle θ compris entre les limites θ_1 et θ_2. Mais la quantité de telles tangentes est $\theta_2 - \theta_1 = \pi - \alpha$; la quantité des tangentes AB est $\pi - \alpha$; par conséquent, la quantité des points d'intersection dans PQR égale $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)^2$. Donc est

Fig. 70.

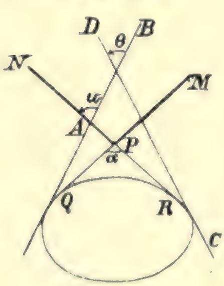


$$\text{3)} \qquad \int\int \frac{\sin\theta}{TT'}\, dJ = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)^2,$$

l'intégration étendue au champ indiqué plus haut.

116. — 4. Compter la quantité des points d'intersection dans l'espace d'angle infini, formé par deux tangentes fixes.

Fig. 71.



MPQ, NPR (fig. 71) sont les tangentes fixes; leur angle est α; MPN, l'espace d'angle infini sur lequel les points d'intersection sont à compter. Nous considérons une tangente AB qui passe à travers cet espace d'angle; elle est, dans celui-ci, rencontrée par toute tangente qui avec elle, comme CD, enserre un angle θ plus petit que l'angle u. La quantité de telles tangentes est u; la quantité des tangentes AB, de la direction prise, du; la quantité des points d'intersection réciproques, $u\,du$; par suite, la quantité de tous les points d'intersection du mode indiqué, $\int_0^\alpha u\,du = \frac{1}{2}\alpha^2$. Conséquemment est

$$4)\qquad \int\int \frac{\sin\theta}{TT'}\,dJ = \frac{1}{2}\alpha^2,$$

lorsque l'intégrale est étendue à l'espace d'angle infini MPN.

117. **Problème XL.** — *Trouver la probabilité pour que deux tangentes menées dans des directions quelconques, d'une ellipse, se coupent à l'intérieur du cercle circonscrit au rectangle des axes, à l'intérieur du rectangle des axes même.*

Solution. — La quantité de tous les points d'intersection des tangentes, d'après le n° 113, est égale à $2\pi^2$.

Comme θ, le long du cercle circonscrit au rectangle des axes, a la valeur constante $\frac{\pi}{2}$, sur la surface annulaire limitée par le cercle et par l'ellipse, d'après le n° 114, tombent $2\pi\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \pi^2$ points d'intersection. Par conséquent, la première des probabilités en question est

$$p_1 = \frac{1}{2}.$$

Le périmètre du rectangle des axes se décompose en quatre couples de tangentes fixes, dont chaque couple enserre l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$; dans un des quatre triangles mixtilignes, que l'ellipse découpe du rectangle, tombent, suivant le numéro 115, $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi^2$ points d'intersection; dans tous, $\frac{1}{2}\pi^2$ points d'intersection.

La probabilité échéant au second événement est donc

$$p_2 = \frac{1}{4}.$$

118. **Théorème XII.** — *La densité des points d'intersection de toutes les tangentes qui peuvent être menées à une courbe fermée, convexe, en des points quelconques de celle-ci, est exprimée, en un point à l'extérieur de la courbe, par* $\frac{\varrho\varrho'}{TT'}\sin\theta$,

lorsque θ est l'angle sous lequel la courbe se projette du point, lorsque T, T′ *sont les longueurs des tangentes menées par ce point à la courbe et ϱ, ϱ' les rayons de courbure aux points de contact de ces tangentes.*

Démonstration. — L'établissement de ce théorème s'obtient par la proposition du n° 111. La formule α) donne là pour la quantité des points d'intersection tombant sur le cercle décrit autour du point considéré P, cercle de surface dJ, l'expression

$$\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\sin\theta}{TT'}dJ.$$

L'angle de contingence ϑ, là, est constant; ici il est variable et, au point A (fig. 66 a) et aux entours immédiats de celui-ci, a la valeur

$$\vartheta = \frac{ds}{\varrho};$$

au point B et en sa proximité immédiate, la valeur

$$\vartheta' = \frac{ds}{\varrho'}.$$

Dans l'expression écrite ci-dessus est donc à mettre à la place de ϑ^2

$$\vartheta\vartheta' = \frac{ds^2}{\varrho\varrho'},$$

par quoi, elle se transforme en l'expression

$$\frac{1}{ds^2}\frac{\varrho\varrho'}{TT'}\sin\theta\, dJ.$$

De celle-ci, résulte la densité — avec élimination du facteur constant ds^2 —

$$1)\qquad \delta = \frac{\varrho\varrho'}{TT'}\sin\theta.$$

Le compte de tous les points d'intersection conduit à une formule d'intégrale remarquable; la quantité de ces points s'élève, lorsque L désigne la longueur de la courbe, manifestement à $\frac{1}{2}L^2$; de sorte que

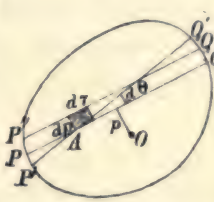
$$2)\qquad \int\int\frac{\varrho\varrho'}{TT'}\sin\theta\, dJ = \frac{1}{2}L^2,$$

lorsque l'intégration est étendue au plan infini au dehors de la courbe.

119. **Théorème XIII**. — *La somme des cubes des cordes, découpées sur toutes les sécantes menées à volonté d'une courbe fermée, convexe est mesurée par le triple carré de la superficie de la surface limitée par la courbe.*

Démonstration. — La totalité des sécantes est représentée analytiquement par la variété continue, deux fois étendue des variables p, θ : p signifie la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un pôle O (fig. 72) sur la sécante, et θ l'inclinaison de cette perpendiculaire sur une droite fixe; les limites de θ sont 0 et 2π, celles de p sont stipulées par la forme de la courbe. Si l'on désigne par C la longueur de la corde PQ, qui correspond à la combinaison des valeurs p, θ, la somme définie plus haut est exprimée par l'intégrale.

Fig 72.



$$\iint C^3\, dp\, d\theta,$$

qui est à étendre au domaine complet de la variété décrite. La considération suivante conduira à une seconde signification géométrique de cette intégrale et par là à sa valeur.

Pour découvrir la quantité des lignes de jonction de couples de points pris arbitrairement dans la surface de la courbe, nous partons d'une couple de points A, B, fixons d'abord un point de celle-ci, A, et menons par ce point une corde PQ, dont la perpendiculaire a l'inclinaison θ, puis une seconde corde $P'Q'$, qui enserre avec la première l'angle infiniment petit $d\theta$. La quantité des lignes de jonction AB, qui passent par A et dont les directions sont comprises entre PQ et $P'Q'$, est exprimée par

$$\Delta APP' + \Delta AQQ' = \frac{1}{2}\{r^2 + (C-r)^2\}\, d\theta,$$

lorsqu'on pose $AP = r$, par conséquent $AQ = C - r$.

A change-t-il maintenant aussi sa position sur l'élément de la surface, lequel élément est enclos par PQ et par une corde $P''Q''$ parallèle à PQ, à la distance dp? La quantité des lignes de jonction AB, dont les directions se trouvent entre celles de PQ et de $P'Q'$, est égale à

$$\alpha) \quad \frac{1}{2}\, dp\, d\theta \int_0^C \{ r^2 + (C - r)^2 \} dr = \frac{1}{3}\, C^3\, dp\, d\theta;$$

par conséquent, enfin, la quantité de toutes les lignes de jonction AB, lorsqu'on confère à la corde PQ tous les éloignements admissibles, de 0, et, à la perpendiculaire toutes les directions, est

$$\frac{1}{3} \int\int C^3\, dp\, d\theta.$$

Mais d'un autre côté, cette quantité est identique à la quantité de toutes les couples de points, qui peuvent être prises à l'intérieur de la courbe, par conséquent est égale à J^2, lorsque J désigne la superficie de la courbe. Donc, on a la relation

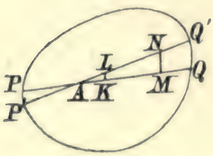
$$1) \qquad \frac{1}{3} \int\int C^3\, dp\, d\theta = J^2,$$

d'où résulte l'affirmation produite

$$2) \qquad \int\int C^3\, dp\, d\theta = 3\, J^2\ (^1).$$

120. **Problème XLI.** — *A l'intérieur d'une courbe fermée, convexe, deux points sont pris arbitrairement et reliés par une corde qui par eux est divisée en trois sections. Trouver la probabilité pour qu'avec ces sections un triangle puisse être formé.*

Fig. 73.



Solution. — Nous considérons, comme lors de la démonstration du théorème précédent, premièrement l'un des points A comme fixe, menons par celui-ci deux cordes PQ, $P'Q'$ (fig. 73), qui enserrent l'angle infiniment petit $d\theta$, et cherchons les positions favorables du second

(1) Crofton, en 1869, a communiqué cette proposition à l'académie de Paris (v. Comptes rendus, 1869, pag. 1469). Serret a donné une démonstration analytique de ce théorème dans les annales scientif. de l'école norm. sup., 1869, pag. 177 (comp. à la note du n° 100).

point B à l'intérieur de la surface enclose par ces cordes. Pour ce dessein, on a à partager en deux parties égales PQ par le point K, à porter PA en KM et à décrire de A avec AK et AM les arcs de cercle KL et MN; les positions favorables de B tombent dans le quadrilatère $KMLN$, parce qu'alors est

$$PA + AB > \frac{PQ}{2}, \quad AB < \frac{PQ}{2};$$

leur quantité est conséquemment

$$\frac{1}{2} d\theta (AM^2 - AK^2) = \frac{1}{2} d\theta \left\{ \frac{1}{4}(AQ + AP)^2 - \frac{1}{4}(AQ - AP)^2 \right\}$$
$$= \frac{1}{2} AP \, . \, AQ \, . \, d\theta,$$

ou, lorsque de nouveau est posé $PQ = C$, $AP = r$, est égale à

$$\frac{1}{2} r (C - r) d\theta.$$

Si maintenant A change sa position sur l'élément de surface limité par PQ et par une corde parallèle à PQ à la distance dp, pour la quantité des cas favorables correspondants à ces positions de A, s'obtient l'expression

$$\frac{1}{2} dp \, d\theta \int_0^C r (C - r) \, dr = \frac{1}{12} C^3 \, dp \, d\theta,$$

et enfin pour toutes les positions de A, à l'intérieur de la courbe,

$$\frac{1}{12} \int\int C^3 \, dp \, d\theta.$$

Si l'on introduit, pour l'intégrale, la valeur trouvée au n° 119, équation 2), on a finalement pour la quantité des cas favorables $\frac{1}{4} J^2$, pour la quantité des cas possibles J^2, de manière que la probabilité requise

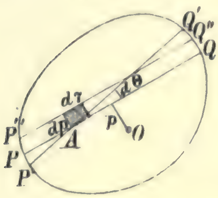
$$\omega = \frac{1}{4}$$

est indépendante de la forme plus explicite de la courbe.

121. **Problème XLII**. — *A l'intérieur d'une courbe fermée, convexe, deux points sont pris arbitrairement; trouver la probabilité pour qu'une sécante menée à volonté de la courbe les comprenne.*

Solution. — On appelle la longueur de la courbe L, sa superficie J. L'un des points, A (fig. 74), est fixé de nouveau.

Fig. 74



La probabilité pour que le second point B vienne à se trouver entre les cordes PQ et $P'Q'$ et à l'éloignement ϱ de A est $\frac{\varrho\, d\varrho\, d\theta}{J}$ et la probabilité pour que les points A, B, dans cette position réciproque, soient compris dans la sécante s'élève à $\frac{2\varrho}{L}\cdot$ Étendues à toutes les positions de B entre les cordes PQ, $P'Q'$, ces probabilités donnent la probabilité composée

$$\frac{2}{LJ}\, d\theta \left\{ \int_0^r \varrho^2\, d\varrho + \int_0^{C-r} \varrho^2\, d\varrho \right\} = \frac{2}{3LJ} \left\{ r^3 + (C-r)^3 \right\} d\theta.$$

Pour étendre celle-ci à toutes les positions de A dans l'élément $PQQ''P''$, pendant que la direction de AB persiste entre les directions de PQ et de $P'Q'$, on a à multiplier la dernière expression par la probabilité pour que A tombe dans l'élément contigu $dp\, dr$, c'est-à-dire par $\frac{dp\, dr}{J}$, et à intégrer le produit par rapport à r dans les limites 0 et $PQ = C$; par cela, on obtient

$$\frac{2}{3LJ^2}\, dp\, d\theta \int_0^C \{r^3 + (C-r)^3\}\, dr = \frac{1}{3LJ^2}\, C^4\, dp\, d\theta.$$

Enfin, il en résulte la probabilité totale de l'événement susdit pour toutes les couples de points A, B; elle est

$$\alpha) \qquad \omega = \frac{1}{3LJ^2} \int\int C^4\, dp\, d\theta,$$

l'intégration étendue à toutes les sécantes de la courbe.

L'intégration nécessaire pour l'évaluation de ω est exécutable seulement pour certaines courbes.

Ci-après deux exemples.

122. — 1. A l'intérieur d'un cercle, deux points sont pris arbitrairement; trouver la probabilité pour qu'une sécante du cercle menée à volonté les comprenne.

Suivant l'équation α) du n° 121, est

$$\omega = \frac{1}{3LJ^2}\int\int C^4\, dp\, d\theta.$$

Dans le cas présent, si r désigne le rayon du cercle et 2α l'angle sous lequel la corde C est vue du centre, est

$$C = 2r \sin\alpha, \quad dp = r \sin\alpha\, d\alpha;$$

par conséquent,

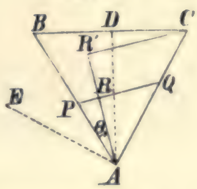
$$\omega - \frac{1}{6\pi^3 r^5}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 r^5 \sin^5\alpha\, d\alpha = \frac{16}{3\pi}\left[-\frac{5}{8}\cos\alpha + \frac{5}{48}\cos 3\alpha - \frac{1}{80}\cos 5\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}};$$

c'est

$$\omega = \frac{128}{45\pi^2}.$$

123. — 2. Dans la surface d'un triangle équilatéral, deux points sont pris arbitrairement; trouver la probabilité pour qu'une transversale quelconque du triangle les comprenne.

Fig. 75.



La probabilité cherchée est de nouveau à calculer suivant l'équation α) du n° 121.

Le sommet A (fig. 75) est pris comme pôle, le côté $AB = a$ comme direction initiale; ensuite $PQ = C$ est une corde quelconque, $AR = p$ la perpendiculaire menée à celle-ci; ainsi, par la relation

$$Cp = 2\Delta APQ = AP\,.\,AQ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{p}{\cos\theta}\,\frac{p}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} \sin\frac{\pi}{3},$$

s'obtient

$$C = \frac{p}{\cos\theta \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} \sin\frac{\pi}{3}.$$

Si l'on limite l'intégration par rapport à θ à l'intervalle $-\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{6}$ (dans lequel la perpendiculaire prend toutes les directions entre $AE \perp AC$ et AD), et par rapport à p à l'intervalle 0 à $AR' = AC \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = a \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$, en conséquence de la symétrie de la figure, on obtient la sixième partie de l'intégrale de la formule α); donc est

$$\int\int C^4 \, dp \, d\theta = 6 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} \frac{p^4}{\cos^4\theta \cos^4\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} \sin^4 \frac{\pi}{3} \, dp$$

$$= \frac{27\,a^5}{40} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{\cos^4\theta} \, d\theta.$$

Maintenant est

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{\cos^4\theta} \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} + \sin\frac{\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\cos^4\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \left[\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{2} l \,.\, tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} l \,.\, 3;$$

ensuite,

$$\int\int C^4 \, dp \, d\theta = \frac{27\,a^5}{40}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} l \,.\, 3\right),$$

et comme est $L = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, on a finalement

$$\omega = \frac{16}{27\,a^5} \cdot \frac{27\,a^5}{40}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} l \,.\, 3\right) = \frac{2}{15} + \frac{1}{10} l \,.\, 3.$$

124. Théorème XIV. — *Si l'on désigne par* p *la probabilité pour qu'une sécante menée à volonté d'une courbe fermée, convexe comprenne deux points pris arbitrairement à l'intérieur de celle-ci, et par* p_1 *la probabilité pour que la sécante coupe un* *triangle formé par trois points choisis arbitrairement à l'intérieur de la courbe, on a* $p_1 = \frac{3}{2}\, p$.

Démonstration. — p_2 est la probabilité pour que la sécante rencontre une couple de côtés déterminée — manifestement cette probabilité est la même pour toutes des couples de côtés —; on a

$$1) \qquad p_1 = 3\, p_2.$$

Lorsque A, B, C désignent les trois points, avec les annotations symboliques employées au n° 71, est

$$p\,(AB) = p\,(AB,\, AC) + p\,(AB,\, BC) = p,$$

ou, parce que $p\,(AB,\, AC) = p\,(AB,\, BC) = p_2$,

$$2p_2 = p;$$

si l'on introduit la valeur de p_2 de cette équation dans 1), se donne effectivement

$$2) \qquad p_1 = \frac{3}{2}\, p.$$

Lorsqu'il s'agit d'un cercle, on obtient pour la probabilité se trouvant en question, à l'aide de la valeur trouvée pour $p\ (= \omega)$ au n° 122,

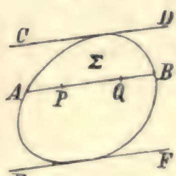
$$p_1 = \frac{64}{15\pi^2}$$

et lorsqu'il s'agit d'un triangle équilatéral, suivant le n° 123,

$$p_1 = \frac{1}{5} + \frac{3}{20}\, l\,.\,3.$$

125. **Problème XLIII**. — *A l'intérieur d'une courbe fermée, convexe, de superficie* J, *deux points sont pris arbitrairement et reliés par une droite. Quelle est la probabilité pour que deux points pris ensuite à volonté dans la surface de la courbe se trouvent du même côté de la droite?*

Fig. 76.



Solution. — Soient P, Q (fig. 76) deux points choisis à volonté, $AB = C$ la corde les reliant; on désigne les coordonnées de celle-ci par p, θ; conformément à l'équation α) du n° 119, la quantité des lignes de jonction PQ dont l'argument θ se trouve entre les limites θ et $\theta + d\theta$, pour toutes les positions du point P entre AB et une corde parallèle à cette droite, dans la distance dp, est exprimée par

$$\frac{1}{3} C^3\, dp\, d\theta$$

et comme J^2 est la mesure de la quantité de toutes les lignes de jonction PQ, ainsi échoit à une droite PQ, de la condition prescrite, la probabilité

$$1)\qquad \frac{1}{3J^2} C^3\, dp\, d\theta.$$

Puis, si Σ signifie la superficie du segment se trouvant d'un côté de la droite,

$$2)\qquad \frac{\Sigma^2}{J^2}$$

est la probabilité pour que les deux points R, S à prendre ensuite arbitrairement tombent dans ce segment.

Si l'on intègre le produit de 1) et de 2) pour toutes les positions de la corde AB, entre les tangentes EF, CD (donc avec θ constant), on obtient la probabilité pour que les points R, S, lors de cette direction de PQ, se trouvent tous deux AU-DESSUS de PQ, à laquelle probabilité, la probabilité pour que tous deux gisent AU-DESSOUS de PQ, manifestement, est égale. Par conséquent, pour rapporter tous les cas, on a à prendre pour Σ constamment le segment situé du même côté de AB et à doubler l'expression gagnée.

La probabilité requise est donc

$$3)\qquad \Pi = \frac{2}{3J^4} \int\int C^3\, \Sigma^2\, dp\, d\theta,$$

l'intégration étendue à toutes les positions de la corde et Σ pris pendant l'intégration toujours du même côté de la corde [1].

Comme application, prenons le cercle. Lorsque r désigne

---

[1] Si l'autre segment découpé par la corde AB est désigné par Σ', Π se laisse représenter aussi sous la forme suivante :

$$\alpha)\qquad \Pi = \frac{1}{3J^4}\left(\int\int C^3\, \Sigma^2\, dp\, d\Theta + \int\int C^3\, \Sigma'^2\, dp\, d\Theta\right).$$

le rayon et 2α l'angle sous lequel la corde $AB = C$ est vue du centre, on a

$$C = 2\,r\,sin\,\alpha,$$
$$\Sigma = r^2\,(\alpha - sin\,\alpha\,cos\,\alpha),$$
$$dp = r\,sin\,\alpha\,d\alpha,$$

$$\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta = 8\,r^8\int_0^\pi\int_0^\pi(\alpha - sin\,\alpha\,cos\,\alpha)^2\,sin^4\,\alpha\,d\alpha\,d\theta$$
$$= 8\pi\,r^8\int_0^\pi(\alpha^2 - 2\alpha\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha + sin^2\,\alpha\,cos^2\,\alpha)\,sin^4\,\alpha\,d\alpha.$$

Par intégration par parties, on trouve facilement

$$\int_0^\pi \alpha^2\,sin^4\,\alpha\,d\alpha = \frac{1}{8}\,\pi^3 - \frac{15}{64}\,\pi,$$

$$\int_0^\pi 2\alpha\,sin^5\,\alpha\,cos\,\alpha\,d\alpha = -\frac{5}{48}\,\pi.$$

enfin

$$\int_0^\pi sin^6\,\alpha\,cos^2\,\alpha\,d\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6\,\alpha\,d\alpha - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^8\,\alpha\,d\alpha = \frac{15}{384}\,\pi;$$

pour le cercle, est donc

$$4)\qquad \int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta = \pi^2\,r^8\left(\pi^2 - \frac{35}{48}\right).$$

Si l'on introduit cette valeur dans la formule 3), celle-ci donne

$$\Pi = \frac{2}{3} - \frac{35}{72\pi^2}.$$

Pour la probabilité pour que les points R, S se trouvent de côté et d'autre de la droite PQ, s'obtient, par des considérations analogues, la valeur

$$\beta)\qquad \Pi' = \frac{2}{3J^4}\int\int C^3\,\Sigma\Sigma'\,dp\,d\theta.$$

La somme de ces probabilités est

$$\Pi + \Pi' = \frac{1}{3J^4}\int\int C^3\,(\Sigma + \Sigma')^2\,dp\,d\theta = \frac{1}{3J^2}\int\int C^3\,dp\,d\theta,$$

cela est, en considération de l'équation 2) du n° 119,

$$\Pi + \Pi' = 1,$$

Par là, la probabilité pour que les deux points pris en dernier lieu tombent aux côtés DIFFÉRENTS de la droite qui joint les deux points pris en premier lieu est égale à

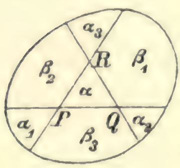
$$\Pi' = \frac{1}{3} + \frac{35}{72\pi},$$

c'est-à-dire que réduits, $\Pi = 0{,}61741$, $\Pi' = 0{,}38259$.

126. **Problème XLIV**. — *A l'intérieur d'une courbe fermée, convexe, de superficie J, trois points sont pris à volonté. Quelle est la probabilité pour qu'un quatrième point choisi arbitrairement dans la surface tombe à l'extérieur du triangle déterminé par les trois premiers points?*

Solution. — Soient les trois premiers points P, Q, R (fig. 77).

Fig. 77.



Par les cordes les joignant, la surface de la courbe est divisée en sept parties. Si l'on désigne par p_α, $p_{\alpha_1} \ldots$, $p_{\beta_1} \ldots$ les probabilités pour que le quatrième point, S, vienne à se trouver dans les parties respectives, la probabilité exigée est

1) $$\Pi = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + p_{\alpha_3} + p_{\beta_1} + p_{\beta_2} + p_{\beta_3}.$$

Mais on se convainc facilement que

2) $$p_{\alpha_1} = p_{\alpha_2} = p_{\alpha_3} = p_\alpha, = p_{\beta_1} = p_{\beta_2} = p_{\beta_3},$$

car, pendant que p_{α_3} désigne la probabilité pour que le triangle PQS enclose le point R, p_α est la probabilité pour que le triangle PQR recueille le point S; par conséquent, manifestement,

$$p_{\alpha_3} = p_\alpha \ldots$$

Puis, p_{β_2} peut être envisagé comme la probabilité pour que le sommet du triangle PQS vu de PQ se trouve à gauche du sommet du triangle PQR; p_{β_1}, comme la probabilité pour que le sommet du triangle PQS vu de PQ soit disposé à droite du sommet du triangle PQR; par conséquent, réellement,

$$p_{\beta_2} = p_{\beta_1} \cdots$$

A la considération de 2), l'expression 1) peut donc s'écrire

3) $$\Pi = 3(p_{\alpha_1} + p_{\beta_1}).$$

Mais, d'un autre côté,

$$p_\alpha + p_{\alpha_3} + p_{\beta_1} + p_{\beta_2} = 2\,(p_{\alpha_1} + p_{\beta_1})$$

est la probabilité pour que les points R et S se trouvent du même côté de PQ; par suite, suivant l'équation 3) du n° 125,

4) $$2\,(p_{\alpha_1} + p_{\beta_1}) = \frac{2}{3J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta.$$

Par comparaison de 3) avec 4), on obtient enfin

5) $$\Pi = \frac{1}{J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta,$$

dans laquelle expression, les mêmes remarques sur l'intégration sont valables que celles sur l'intégration dans l'équation 3) du n° 125.

La probabilité pour que le quatrième point S tombe dans le triangle PQR des trois premiers points, par cela, est

6) $$\Pi' = 1 - \Pi.$$

Appliquée au cercle, on obtient, avec la valeur trouvée de l'intégrale double par l'équation 4) du n° 125,

$$\Pi = 1 - \frac{35}{48\pi^2}, \quad \Pi' = \frac{35}{48\pi^2}.$$

127. **Problème XLV.** — *A l'intérieur d'une courbe fermée, convexe, quatre points sont pris arbitrairement. Trouver la probabilité pour qu'ils forment un quadrilatère convexe.*

Solution. — Les quatre points forment-ils un quadrilatère non convexe, c'est-à-dire un quadrilatère avec un angle rentrant? L'un des points, indifféremment lequel, doit tomber dans le triangle déterminé par les trois autres; si la probabilité relative à ce cas, cependant pour un point spécifié des quatre points, est désignée par Π', la probabilité totale pour que les quatre points déterminent un quadrilatère NON CONVEXE est

$$Q = 4\,\Pi',$$

ou lorsque la valeur trouvée pour Π' au n° 126, équations 5) et 6), est introduite, est

1) $$Q = 4\left(1 - \frac{1}{J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta\right);$$

par cela, la probabilité d'un quadrilatère CONVEXE est

2) $$P = 1 - Q = \frac{4}{J^4}\int\int C^3\,\Sigma^2\,dp\,d\theta - 3.$$

Au sujet de l'étendue de l'intégration, il faut se référer au nº 125.

Par l'utilisation de la valeur de l'intégrale de l'équation 4) du nº 125, s'obtient la probabilité pour que quatre points pris à volonté dans la surface d'un cercle forment un quadrilatère CONVEXE,

$$P = 1 - \frac{35}{12\pi^2}.$$

REMARQUE. — Les valeurs des probabilités déduites au nº 126 et au nº 127 pour le cercle conservent leur valabilité pour l'ellipse, puisque celle-ci, avec les points pris arbitrairement dans sa surface, peut être envisagée comme la projection parallèle d'un cercle, dans la surface duquel des points sont pris arbitrairement. A chaque cas possible et à chaque cas favorable de l'une des figures, correspond un cas similaire dans l'autre.

2. Droite dans l'espace.

128. Comme pour les droites dans le plan, pour les droites dans l'espace, trois cas de l'arbitraire peuvent être différenciés.

1. Un point est donné; par celui-ci, une droite doit être menée. La DIRECTION de la droite est indéterminée, donc peut être prise arbitrairement.

Toute totalité de telles droites peut être ramenée à une totalité de points, en coupant les droites par une surface sphérique qui a pour centre le point donné : la première totalité peut donc être mesurée par la seconde. Il en résulte immédiatement les propositions :

Dans l'espace, la quantité de toutes les droites qui peuvent être menées par un point donné a pour mesure 2π.

Dans l'espace, la quantité de tous les rayons qu'on peut faire jaillir d'un point donné est mesurée par 4π.

Une partie d'une de ces totalités est délimitée en général, par une surface conique et est mesurée par la superficie de la figure que découpe cette surface conique dans la surface sphérique; le rayon de celle-ci sert d'unité.

2. Une direction est donnée; une droite de cette direction doit être menée. La POSITION de cette droite est indéterminée, peut donc être prise à volonté.

Chaque totalité de telles droites peut être ramenée à une totalité de points, laquelle on obtient en coupant les droites par un plan normal à leur direction : les deux totalités se laissent exprimer par la même mesure. La proposition suivante en résulte :

Dans l'espace, la quantité de toutes les droites qui peuvent être menées dans une direction donnée, dans des limites données, est mesurée par la superficie de la section normale de la surface cylindrique les renfermant.

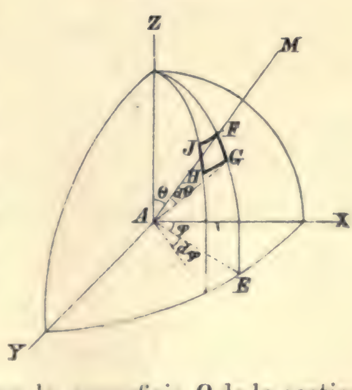
3. Une droite est à mener dans l'espace. DIRECTION et POSITION sont indéterminées; l'une et l'autre sont à prendre arbitrairement.

On a à se représenter la totalité de telles droites absolument arbitraires comme un système géométrique de droites, qui se compose de faisceaux de la seconde espèce parallèles, suivant l'ordre, à toutes les droites d'un faisceau de la première espèce.

La proposition suivante s'occupe du mesurage d'une telle totalité.

129. **Théorème I.** — *La quantité de toutes les droites arbitraires qui coupent une surface fermée, convexe est mesurée par l'aire de celle-ci.*

Fig. 78.



Démonstration. — Nous nous représentons un des faisceaux de droites parallèles, desquels se compose la totalité en question; soit sa direction désignée par la droite AM (fig. 78). Ce faisceau est limité par la surface cylindrique parallèle à AM enveloppant la surface et mesuré par la superficie Ω de la section normale de cette surface cylindrique.

Pour coordonnées angulaires de la direction AM, nous choisissons l'angle $ZAM = \theta$ et l'angle d'inclinaison du plan ZAM sur le plan ZAX, c'est l'angle $XAE = \varphi$. La quantité des directions dont les coordonnées angulaires se trouvent entre les limites θ et $\theta + d\theta$, d'un côté, et φ et $\varphi + d\varphi$, de l'autre côté, est mesurée par la superficie du quadrilatère $FGHJ$ sur la surface sphérique décrite de A comme centre avec l'unité de longueur comme rayon, quadrilatère qui est délimité par les méridiennes correspondant à φ et à $\varphi + d\varphi$ et par les cercles parallèles correspondant à θ et à $\theta + d\theta$; si nous désignons cette superficie par $\mathfrak{J}$, la superficie de la projection du quadrilatère sur le plan XAY par $\mathfrak{J}'$, nous avons

$$\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} \cos\theta,$$

et comme

$$\mathfrak{J}' = \sin\theta \, d\varphi \, d(\sin\theta) = \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

il s'ensuit que

$$\mathfrak{J} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

La quantité des droites de tous les faisceaux parallèles, dont les directions tombent dans le champ élémentaire désigné, conséquemment, est exprimée par

$$\Omega \mathfrak{J} = \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

et la quantité de toutes les droites qui coupent la surface donnée par

1) $$\int_0^\pi \int_0^\pi \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \, O,$$

puisque toutes les directions sont épuisées lorsqu'on fait varier θ et φ entre les limites 0 et π. O signifie l'aire. Avec suppression du facteur constant $\frac{\pi}{2}$, la quantité développée peut donc se poser ainsi :

2) $$N = O.$$

Remarque. — La proposition exprimée par l'équation 1) est un cas spécial de la proposition générale sur la complanation des surfaces; Cauchy, dans le XIII[e] tome des Comptes

rendus ([1]), a communiqué sans démonstration cette proposition générale; adaptée aux désignations faites par nous, elle s'énonce : " θ désigne l'angle que forme une droite quel-
„ conque AM avec un axe fixe AZ; φ, l'angle que le
„ plan ZAM enserre avec un plan fixe ZAX; O, une somme
„ de plusieurs surfaces planes ou courbes; P, la somme des
„ valeurs absolues des projections des éléments individuels
„ de O sur un plan perpendiculaire à AM; on a

$$O = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \text{"}$$

Pour obtenir la démonstration, il suffit de considérer UNE surface plane de délimitation quelconque et de la supposer normale à AZ. Si O désigne sa superficie, est

α) $$P = O \cos\theta,$$

par conséquent

β) $$\iint P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \iint O \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi;$$

l'intégration doit être effectuée par rapport à θ entre les limites $-\pi$ et π, par rapport à φ entre 0 et φ, cependant pour les valeurs absolues de P, et à cause de α), pour les valeurs absolues de $\cos\theta$. Maintenant, $\cos\theta$ atteint quatre fois, entre les limites d'intégration relatives à θ, chaque valeur numérique et toutes les diverses valeurs entre 0 et 1, lorsque θ parcourt les valeurs de 0 à $\frac{\pi}{2}$; on a à intégrer donc à droite par rapport à θ entre ces limites et à quadrupler le résultat; de manière que, sous les conditions établies,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} P \sin\theta \, d\theta 2\varphi = 4\,O \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi = 4\pi O \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d(\sin\theta) = 2\pi O,$$

d'où

$$O = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

([1]) Comp. à la remarque du n° 79.

L'extension de la proposition à une surface courbe, ouverte ou fermée ne présente aucune difficulté.

Un cas spécial se réalise lorsque la surface est convexe et fermée. La somme des valeurs absolues des projections de tous les éléments de la surface sur le plan normal à AM est alors égale à la double aire 2Ω de la section normale de la surface cylindrique projetante; par conséquent on a

$$O = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

ou, comme dans le tournement de AM tracé par les limites d'intégration pour θ, la projection Ω atteint chacune de ses valeurs deux fois et toutes les diverses valeurs dans les limites 0 et π,

$$O = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \Omega \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

par quoi, la proposition portée à l'application plus haut dans l'équation 1) est démontrée.

130. **Problème I.** — *Déterminer la probabilité pour qu'à un cône droit donné, parallèlement à une direction prise arbitrairement, des plans tangents puissent être menés.*

Solution. — On mène par le sommet du cône, dont les génératrices, avec l'axe du cône, enserrent l'angle α, une parallèle à la direction prise; il n'y a PAS de plan tangent lorsque cette parallèle se trouve à l'intérieur du cône; la probabilité de ce fait est égale au quotient de la surface du segment sphérique que découpe la surface conique dans une surface sphérique décrite de son sommet, par la demi surface sphérique; donc est

$$1) \qquad q = \frac{4\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2\pi} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

la probabilité cherchée est par conséquent

$$2 \qquad p = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

131. **Problème II.** — *Par un point donné, une droite est menée arbitrairement; trouver la probabilité pour qu'elle enserre, avec un axe fixe, passant par le point donné, un angle entre les limites α et $\alpha + d\,\alpha$.*

Solution. Le q calculé dans le problème précédent exprime la probabilité pour que la droite menée par le sommet du cône, avec l'axe du cône, fasse un angle plus petit que α; par conséquent, la probabilité requise est

$$\omega = dq = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \, d \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \, d \alpha.$$

132. **Problème III.** — *Sur la demi-sphère septentrionale, deux points sont désignés arbitrairement; découvrir la probabilité pour que leur distance dépasse 90° du plus grand cercle.*

Solution. — Que l'un des deux points, P. ait la distance polaire α; la probabilité relative à ce fait, d'après le n° 131, est égale à $\omega = \sin \alpha \, d \alpha$. On mène de P comme pôle le plus grand cercle de la sphère, celui-ci découpe de la demi-sphère septentrionale un fuseau de l'angle α et seulement lorsque le second point Q tombe dans ce fuseau, il est correspondu aux conditions de la question; la probabilité d'une telle position de Q est $\frac{\alpha}{\pi}$.

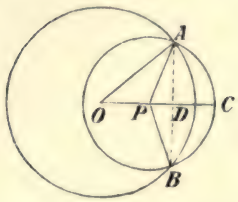
Par conséquent, la probabilité totale, composée de l'événement susdit est

$$p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \sin \alpha \, d \alpha = \frac{1}{\pi}.$$

133. **Problème IV.** — *A l'intérieur d'une sphère donnée, un point est pris arbitrairement et de celui-ci un trait de longueur donnée est mené dans une direction arbitraire. Trouver la probabilité pour que le trait coupe la surface sphérique.*

Solution. — Soit O (fig. 79, p. 172) le centre de la sphère donnée, r son rayon, a la longueur donnée. Supposé que le point désigné à volonté tombe à l'éloignement x, mesuré de O, par exemple en P; la probabilité relative à ce fait est $\frac{4\pi x^2 dx}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3} x^2 dx$. Pour obtenir le domaine des traits favorables, on décrit de P comme centre avec le rayon a une surface sphérique, qui coupe la surface sphérique donnée le long de la circonférence de cercle ADB; la surface du segment ACB donne une mesure pour les cas favorables. Or,

Fig 79.



$$segm.\ ACB = 2\pi a \,.\, DC;$$

du ΔOPA, résulte $r^2 = x^2 + a^2 + 2x \,.\, PD$, d'où $PD = \frac{r^2 - x^2 - a^2}{2x}$ et $DC = a - PD = \frac{(a+x)^2 - r^2}{2x}$; de sorte que la probabilité d'un trait favorable de P égale le quotient

$$\frac{2\pi a \frac{(a+x)^2 - r^2}{2x}}{4\pi a^2} = \frac{(a+x)^2 - r^2}{4ax}.$$

Par là, s'obtient ensuite la probabilité de l'événement en question, savoir

$$p = \int_{r-a}^{r} \frac{3}{r^3} x^2 dx \cdot \frac{(a+x)^2 - r^2}{4ax} = \frac{3}{4ar^3} \int_{r-a}^{r} \{(a+x)^2 - r^2\} x\, dx = \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^3.$$

Implicitement, dans cette déduction, est supposé $a < r$; pour le cas $a > r$, le calcul éprouve un petit changement, mais le résultat demeure le même.

Pour $a = r$, on obtient $p = \frac{11}{16}$ et pour $a = 2r \ldots p = 1$, comme ce doit être [1].

134. **Problème V.** — *Trouver la probabilité pour qu'une sécante menée arbitrairement d'une surface sphérique donnée*

---

[1] Comp. à la question analogue dans le plan (nº 76).

soit à une distance plus petite qu'une longueur donnée a *du centre de cette surface sphérique.*

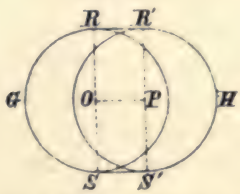
Solution. — La condition de la question est remplie lorsque la droite coupe simultanément une seconde surface sphérique, décrite du centre de la première avec le rayon a; la probabilité requise est donc

$$p = \frac{4\pi a^2}{4\pi r^2} = \left(\frac{a}{r}\right)^2.$$

135. **Problème VI.** — *A l'intérieur d'une sphère du rayon* r, *un point est pris arbitrairement; trouver la probabilité pour que l'éloignement d'une droite menée à volonté, qui coupe la surface sphérique, du point marqué, soit plus petit que* r.

Solution. — O (fig. 80) est le centre de la sphère donnée et le point pris arbitrairement tombe en P; il est correspondu aux conditions de la question lorsque la droite menée à volonté coupe aussi hors de la surface sphérique donnée une surface sphérique décrite du point P comme centre avec le rayon r.

Fig. 80.



On pose $OP = x$; la probabilité de la position supposée de P est égale à

$$\frac{4\pi x^2 dx}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3} x^2 dx;$$

la probabilité pour que la droite coupe les deux surfaces sphériques est égale à

$$\frac{4\pi r^2 - 2\pi rx}{4\pi r^2} = 1 - \frac{x}{2r};\ ^{(1)}$$

(1) Il n'est pas difficile d'étendre la proposition démontrée au n° 88, relative à deux courbes se coupant et à leurs sécantes, à deux surfaces sphériques qui se coupent. A la place des longueurs L, L' des courbes, viennent les surfaces O, O', à la place du fil sans fin, embrassant les courbes, vient une surface enveloppant les sphères; cette surface, pour des sphères égales, comme dans l'exemple ci-dessus, se compose des demi-sphères RGS, $R'HS'$ et de la surface cylindrique $RSS'R'$; pour des sphères inégales, de deux segments sphériques et de l'aire latérale d'un

par là, s'obtient la probabilité totale de l'événement en question, savoir

$$p = \frac{3}{r^3} \int_0^r \left(1 - \frac{x}{2r}\right) x^2 \, dx = \frac{5}{8}. \text{ [1]}$$

TROISIÈME CHAPITRE.

Plans menés arbitrairement.

136. Un plan est " mené arbitrairement ", dans le sens étendu, lorsque les conditions auxquelles il a à correspondre ne suffisent pas à sa détermination; il est " mené arbitrairement ", dans le sens restreint, lorsqu'il n'est lié à aucune condition. Pour les plans de la première espèce, selon les conditions posées, divers cas peuvent être différenciés; les plus importants de ceux-ci sont classés ci-dessous :

1. Une droite est donnée; par celle-ci, doit être mené un plan. Comme la POSITION d'un plan est déterminée par deux points infiniment éloignés et qu'ici il n'est donné que l'un d'eux, l'autre demeure à prendre arbitrairement.

Chaque semblable totalité de plans peut être ramenée à une totalité de droites passant par un point donné, lorsqu'on coupe les plans par un plan perpendiculaire aux droites données.

---

tronc de cône. Si la surface latérale de cette surface enveloppante est de nouveau désignée par Y, l'expression de la probabilité pour qu'une droite quelconque qui rencontre O coupe aussi O' s'énonce $\frac{O + O' - Y}{O}$. Dans le cas ci-dessus, $O = O' = 4\pi r^2$, $Y = 4\pi r^2 + 2\pi r x$; par cela, l'expression écrite là se montre justifiée.

[1] Comp. à la question analogue dans le plan (n° 90).

De cela, entre autres, résulte la proposition :

La quantité de tous les plans pouvant être menés par une droite donnée est mesurée par 2π, la quantité de tous les demi-plans par 4π.

2. Un point est donné ; par celui-ci, un plan est à mener. Ici la POSITION du plan est complètement indéterminée et par conséquent est à prendre arbitrairement.

Chaque semblable totalité de plans peut être ramenée à une totalité de droites dans l'espace, qui passent par un point donné, pendant qu'on élève des perpendiculaires aux plans au point donné.

D'où l'on conclut :

La quantité de tous les plans pouvant être menés par un point donné a pour mesure 2π.

3. Un plan est donné ; lui donner un plan parallèle. Ici la position est déterminée, en échange la SITUATION du plan est indéterminée et est à prendre à volonté.

Chaque semblable totalité de plans peut être ramenée à une totalité de points, obtenue en coupant les plans par une normale commune. Il en résulte :

La totalité de tous les plans de position donnée, compris entre des limites données, est exprimée par la distance (perpendiculaire) des plans limites.

4. S'il s'agit d'un plan " absolument arbitraire ", ni la position, ni la situation ne sont déterminées, l'une et l'autre sont à prendre à volonté. Une telle totalité de plans peut se représenter décomposée en des systèmes de la troisième espèce qui sont parallèles, suivant le rang, aux plans d'un système de la deuxième espèce ; la proposition suivante traite de leur mesure.

137. **Théorème I.** — *Si* p *désigne la longueur, si θ, φ désignent les coordonnées angulaires de la perpendiculaire* (1) *que l'on tire d'un point fixe, situé à l'intérieur d'une surface fermée, convexe sur les plans tangents de celle-ci, la quantité* N

(1) Dans le sens du n° 129.

de tous les plans menés arbitrairement qui coupent la surface est exprimée par l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{p} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Démonstration. — La quantité de tous les plans qui coupent la surface donnée et dont les perpendiculaires possèdent des coordonnées angulaires entre les limites θ et $\theta + d\theta$, φ et $\varphi + d\varphi$, en considération des développements du n° 129, est exprimée par

$$p \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Pour rapporter toutes les directions de la perpendiculaire, on a à intégrer cette expression par rapport à θ entre les limites 0 et 2π, par rapport à φ entre les limites 0 et φ et on obtient ainsi, pour la quantité de tous les plans coupant la surface,

$$N = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Lorsqu'il s'agit d'une sphère, les plans se laissent dénombrer de manière plus simple ; un diamètre est coupé par $2r$ plans, et comme 2π est la quantité de tous les diamètres, $4\pi r$ est la quantité de tous les plans qui coupent la surface sphérique ; l'intégrale ci-dessus fournit la même valeur.

138. **Problème I**. — *Un disque orbiculaire tourne régulièrement et fort promptement autour du diamètre vertical. On tire, en direction horizontale, un coup de feu contre ce disque, pendant qu'on vise un point quelconque de la surface circulaire sous la forme de laquelle le disque tournant se présente à l'observateur. Trouver la probabilité pour que le disque soit touché.*

Solution. — Dans le plan normal à la direction du tir, dans le plan normal qui contient l'axe de rotation, nous choisissons un système de coordonnées rectangulaires, à savoir le point milieu du disque pour origine, l'axe de rotation pour axe des abscisses. Le point M visé et, comme nous le supposons, touché de ce plan a les coordonnées x, y ; la probabilité de la réalisation de cette supposition est $\frac{dx\,dy}{\pi r^2}$, lorsque r désigne le rayon du disque.

Ensuite, supposé que le plan du disque enserre au moment du coup avec le plan des coordonnées l'angle θ, pour quoi la probabilité est $\frac{d\theta}{\pi}$, le disque sera atteint, si le point M tombe à l'intérieur de l'ellipse sous la forme de laquelle le bord du disque, lors de cette position momentanée, se projette sur le plan des coordonnées; l'équation de cette ellipse s'énonce

$$\frac{\xi^2}{r^2} + \frac{\eta^2}{r^2 \cos^2 \theta} = 1;$$

la probabilité de cet événement simple, dont l'arrivée est liée à la condition

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 \cos^2 \theta} < 1,$$

ou

$$-\operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}} < \theta < \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}},$$

s'élève à $\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}$.

Par cela, se livre la probabilité totale, composée de l'événement plus haut spécifié

$$p = \frac{2}{\pi^3 r^2} \int\int\int_0^\pi \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}\, dx\, dy\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi^2 r^2} \int\int \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}\, dx\, dy,$$

l'intégration étendue à la surface entière du cercle.

D'abord, on a

$$\int \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{y^2}{r^2 - x^2}}\, dy = y \operatorname{arc\,cos} \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

d'où

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} arc\cos\sqrt{\frac{y^2}{r^2-x^2}}\,dy = \sqrt{r^2-x^2};$$

par conséquent, finalement est

$$p = \frac{4}{\pi^2 r^2}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{4}{\pi^2 r^2}\cdot\frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{\pi}.$$

Si l'on désigne par ω la probabilité pour que le tireur touche le disque au repos, indifféremment en quel point, $\frac{2}{\pi}\omega$ est la probabilité pour qu'il atteigne le disque tournant; la dernière probabilité est donc environ les $\frac{2}{3}$ de la première.

139. **Problème II**. — *Trouver la probabilité pour qu'une surface de cône droit à base circulaire soit coupée suivant une ellipse, suivant une hyperbole, par un plan mené arbitrairement.*

Solution. — Nous désignons par α l'angle que les génératrices de la surface conique enserrent avec l'axe de celle-ci. On se représente mené par le sommet, au plan coupant, un plan parallèle; la section sera une ellipse, si le dernier plan et la surface conique n'ont en commun que le sommet, ou lorsque la perpendiculaire élevée au sommet à ce plan, forme avec l'axe du cône un angle plus petit que $\frac{\pi}{2} - \alpha$; la probabilité de ce fait est, d'après l'équation 1) du n° 130,

$$q = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

la probabilité d'une section hyperbolique est par conséquent

$$p = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

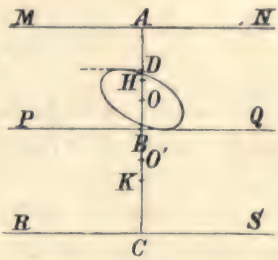
Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, devient $p = q = \frac{1}{2}$.

140. **Problème III**. — *On laisse tomber une monnaie vers un treillage illimité, horizontal, se composant de fils parallèles,*

équidistants; trouver la probabilité pour que la monnaie, dans la chute, atteigne un des fils du treillage.

Solution. — Il suffit de prendre en considération trois fils MN, PQ, RS (fig. 81) se suivant l'un l'autre; il est fait abstraction de leur épaisseur, ainsi que de celle de la monnaie; de même, la vitesse de rotation de celle-ci, relative à la vitesse de chute, est négligée. ABC est une transversale rectangulaire, commune; H, K sont les points milieux de $AB = BC = a$.

Fig. 81.



Manifestement, il suffit d'examiner les cas dans lesquels le centre de la monnaie, dans la chute libre, marque un point de HK.

L'ellipse dessinée dans la fig. 81 représente la projection de la tranche de la monnaie sur le plan du treillage dans l'instant où la monnaie atteint le treillage et est en contact précisément avec le fil PQ. O est le centre de la monnaie et on fait $BO' = BO$; le fil PQ sera touché lorsque, AVEC LA MÊME LARGEUR BD DE LA PROJECTION de la tranche, le centre de la monnaie passe par un point de OO'.

Si l'on désigne par p la probabilité pour que la projection de la tranche de la monnaie ait la largeur $BD = OO' = h$ et par q la probabilité pour que le centre de la monnaie se meuve par un point de OO', la probabilité du concours des deux événements est

$$\omega = pq.$$

PREMIER CAS. — Le diamètre c de la monnaie est plus petit que la portée a des mailles du treillage. La largeur h demeure invariable aussi longtemps que la normale au plan de la monnaie forme, avec la transversale ABC, le même angle α, qui se donne par la relation $h = c \sin \alpha$; la probabilité y relative, en vertu du nº 132, est

$$p = \sin \alpha \, d\alpha;$$

ensuite, comme h, pour toutes les valeurs de α, demeure plus petite que a, est

$$q = \frac{h}{a} = \frac{c}{a} \sin \alpha,$$

par conséquent

$$\omega = \frac{c}{a} \sin^2 \alpha \, d\alpha,$$

et la probabilité totale de l'événement en question

$$1) \qquad P = \frac{c}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{c}{a} \, \frac{\pi}{4}.$$

Deuxième cas. — Le diamètre c de la monnaie est plus grand que la portée a des mailles du treillage. On pose $c \sin \alpha_0 = a$; aussi longtemps que $\alpha < \alpha_0$, devient aussi $h = c \sin \alpha < a$; p et q ont donc les mêmes valeurs que dans le premier cas. Mais est $\alpha > \alpha_0$, devient aussi $h > a$; la monnaie doit alors nécessairement toucher le fil; p conserve sa valeur antérieure, d'autre part, q est à égaler à l'unité. On a donc

$$2) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{c}{a} \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \alpha \, d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{c}{2a} \left(\alpha_0 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0 \right) + \cos \alpha_0 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0} + \cos \alpha_0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} \arcsin \frac{a}{c} + \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - a^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Ainsi, par exemple pour $a = \pi c$ (premier cas), est $P = \frac{1}{4}$; pour $a = c$ (limite entre le premier et le second cas), les deux formules fournissent $P = \frac{\pi}{4}$; pour $a = \frac{c}{2}$ (second cas), devient $P = \frac{1}{6} \pi + \frac{1}{4} \sqrt{3}$.

141. **Problème IV.** — *Trouver la probabilité pour qu'un plan mené arbitrairement qui coupe un ellipsoïde de révolution rencontre l'équateur de celui-ci.*

Solution. — On désigne par n la quantité des plans menés à volonté qui coupent l'équateur, par N la quantité des plans analogues, relatifs à l'ellipsoïde; on a

$$p = \frac{n}{N}.$$

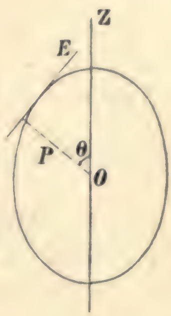
1. Évaluation de N. — Suivant la proposition du n° 137, est

$$N = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

On choisit l'axe de rotation pour axe des Z (fig. 82); alors, N peut aussi s'écrire, en considération du caractère spécial de la surface,

$$N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} p \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \sin\theta \, d\theta.$$

Fig. 82.



La perpendiculaire p au plan tangent E apparait comme rayon vecteur de la podaire (rapportée au centre O) de l'ellipse méridienne, podaire dont l'équation, lorsque a, b sont les demi-axes ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$, l'excentricité linéaire), s'énonce

$$p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta.$$

Suivant cette remarque, est

$$1) \quad \begin{cases} N = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} \sin\theta \, d\theta = 4\pi \int_0^1 \sqrt{b^2 + c^2 x^2} \, dx \\ \qquad = 2\pi \left(a + \frac{b^2}{c} \, l \cdot \frac{a+c}{b} \right). \end{cases}$$

Pour un ellipsoïde aplati, on trouve, par une voie semblable,

$$2) \qquad N = 2\pi \left(b + \frac{a^2}{c} \arc \sin \frac{c}{a} \right).$$

2. Évaluation de n. — Une surface de cercle de rayon r peut être envisagée comme la limite d'un ellipsoïde aplati pour lequel $a = c = r$ et $b = 0$; avec ces valeurs, l'équation 2) fournit

$$n = \pi^2 r;$$

de manière que pour un ellipsoïde oblong

$$3) \qquad n = \pi^2 b,$$

pour un ellipsoïde aplati

$$4) \qquad n = \pi^2 a.$$

Avec les expressions 1) à 4), se donne la probabilité exigée pour un ellipsoïde OBLONG

$$5)\qquad p = \frac{\pi}{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\, l \cdot \frac{a+c}{b}\right)},$$

pour un ellipsoïde APLATI

$$6)\qquad p = \frac{\pi}{2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c}\, arc\, sin \frac{c}{a}\right)}.$$

Avec $a = b$, $c = 0$, c'est-à-dire pour la sphère, les deux formules fournissent $\frac{\pi}{4}$.

142. **Problème V.** — *Un ellipsoïde de révolution est coupé par un plan quelconque; déterminer la probabilité pour que la ligne des pôles (centres des cercles) de l'ellipsoïde soit rencontrée par le plan.*

On désigne par n la quantité des plans qui coupent l'axe de l'ellipsoïde, par N la quantité des plans qui coupent l'ellipsoïde même; ainsi est

$$p = \frac{n}{N}.$$

1. Pour N, sont valables les valeurs de 1) et de 2) du n° 141.

2. ÉVALUATION DE n. — Une droite de longueur $2r$ peut être envisagée comme la limite d'un ellipsoïde oblong pour lequel $a = c = r$ et $b = 0$; avec ces valeurs, l'équation 1) du n° 141 fournit

$$n = 2\pi r;$$

de manière que pour l'ellipsoïde OBLONG

$$1)\qquad \left\{\begin{aligned} n &= 2\pi a, \\ p &= \frac{a}{a + \frac{b^2}{c}\, l \cdot \frac{a+c}{b}}, \end{aligned}\right.$$

pour l'ellipsoïde APLATI

$$
2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} n = 2\pi b, \\ p = \dfrac{b}{b + \dfrac{a^2}{c} \arcsin \dfrac{c}{a}}. \end{array} \right.
$$

Avec $a = b$, $c = 0$, c'est-à-dire pour la sphère, les deux formules s'accordent et fournissent $p = \frac{1}{2}$.

DEUXIÈME PARTIE.

Moyennes géométriques.

Introduction.

143. La valeur moyenne ou la moyenne d'une totalité continue de grandeurs géométriques est à la moyenne d'une série discrète de grandeurs comme la probabilité se rapportant à une totalité continue de cas possibles est à la probabilité ayant pour base une série discrète de cas possibles. La marche à suivre pour la détermination d'une semblable moyenne géométrique s'appuiera par conséquent sur des considérations similaires de celles établies pour la découverte de probabilités géométriques.

Cette marche consiste à se représenter la totalité continue, remplacée par une totalité non continue de la même modalité essentielle, à former la somme de la série discrète des grandeurs géométriques et à diviser cette somme par le nombre de ces dernières; le quotient se rapproche, par la quantité croissante des valeurs séparées, saisies, d'une limite donnant la moyenne de la totalité continue.

Une condition nécessaire est que la série discrète qu'on imagine mise à la place de la totalité continue soit avec celle-ci de modalité égale, essentielle. Si la modalité n'est pas à conclure du texte même du problème, une indétermination subsiste, qui peut conduire, comme avec les probabilités géométriques, à des solutions contradictoires du même problème. Ainsi, la question de la valeur moyenne des ordonnées d'une courbe permet une double interprétation : ou les ordonnées résultent des points de la courbe pris arbitrairement, ou les ordonnées sont menées des points de l'axe des abscisses, pris à volonté; dans le premier cas, les points de la courbe, desquels les ordonnées sont tirées, ont à former une série régulière de points sur la courbe, dans le dernier cas, les points des pieds des ordonnées ont à former une série régulière de points sur la ligne des abscisses. Analytiquement, la différence correspond à celle entre les représentations de l'ordonnée comme fonction de l'arc et comme fonction de l'abscisse.

Pour transporter la détermination d'une moyenne géométrique dans le domaine de l'analyse, on représente la grandeur géométrique dont il s'agit comme la fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes, et on a ensuite la tâche de déterminer la moyenne d'une fonction pour toutes les valeurs ou pour toutes les combinaisons de valeurs des variables indépendantes qui constituent une variété donnée, continue, d'étendue simple ou multiple.

144. 1) La grandeur géométrique y est fonction d'UNE variable indépendante x; c'est $y = \mathfrak{F}(x)$. Soit limité le domaine des valeurs de x par les relations

$$a \leqq x \leqq b;$$

la moyenne M de y, relative à ce domaine de valeurs, est définie par l'équation

$$1)\quad M = \lim \frac{\mathfrak{F}(a) + \mathfrak{F}(a+\varDelta x) + \mathfrak{F}(a+2\varDelta x) + \ldots + \mathfrak{F}(b-\varDelta x)}{\frac{b-a}{\varDelta x}} = \frac{\lim \sum_a^b \mathfrak{F}(x)\varDelta x}{b-a},$$

c'est-à-dire qu'est

$$2\qquad M = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathfrak{F}(x)\,dx.$$

L'expression de la moyenne permet encore deux autres interprétations qui peuvent être jointes ici au cas le plus simple.

Si l'on regarde les valeurs de la grandeur géométrique y, qui correspondent aux valeurs de la variable entre x et $x + \varDelta x$, comme égales et s'accordant avec la valeur originaire $\mathfrak{F}(x)$, puisque $\varDelta x$ est une mesure pour la quantité de ces valeurs, $\mathfrak{F}(x)\,\varDelta x$ est une mesure pour leur somme, et

$$\lim \sum_a^b \mathfrak{F}(x) \varDelta x = \int_a^b \mathfrak{F}(x)\, dx$$

une mesure pour la somme de toutes les valeurs de y dans le domaine complet des valeurs de x; et comme $b - a$ est la mesure congénère pour la quantité des valeurs de x, la moyenne peut être interprétée comme le *quotient de la mesure de la somme des grandeurs géométriques par la mesure de leur quantité, de leur nombre.*

La fraction $\frac{\varDelta x}{b-a}$ exprime la probabilité pour qu'une valeur y saisie à volonté de la grandeur géométrique dépende d'une valeur de la variable dans l'intervalle $x \ldots x + \varDelta x$; suivant cela, la moyenne

$$M = \lim \sum_a^b \mathfrak{F}(x) \frac{\varDelta x}{b - a}$$

peut être interprétée comme *la valeur probable de la grandeur géométrique, lorsque celle-ci est saisie arbitrairement dans la totalité.*

Cette dernière interprétation de la moyenne a l'avantage de se laisser transmettre immédiatement au cas où le champ des valeurs de la variable indépendante n'est pas régulier, c'est-à-dire où la quantité des valeurs de cette variable, dans un intervalle, ne dépend pas seulement de la grandeur de celui-ci, mais aussi de sa situation dans le domaine des valeurs; alors, la probabilité pour qu'une valeur de y saisie à volonté dépende d'une valeur de x entre les limites x et $x + \varDelta x$ apparaît sous la forme

$$\frac{\varphi(x) \varDelta x}{\sum_a^b \varphi(x) \varDelta x},$$

et pour la moyenne de y se donne l'expression

$$3) \quad M = \lim \sum_a^b \mathfrak{F}(x) \cdot \frac{\varphi(x) \varDelta x}{\sum_a^b \varphi(x) \varDelta x} = \frac{\int_a^b \mathfrak{F}(x)\, \varphi(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)\, dx}.$$

145. 2) La grandeur géométrique z est une fonction de deux variables indépendantes x, y. Dans ce cas, la moyenne d'une fonction $z = \mathfrak{F}(x, y)$, pour toutes les combinaisons de valeurs d'un domaine donné K des variables x, y, est à déterminer. On conçoit celles-ci comme les coordonnées rectangulaires d'un point d'un plan; une partie de ce plan correspond à K; cette partie délimitée d'une manière quelconque est décomposée en rectangles par deux systèmes de droites parallèles respectivement à l'axe des X et à l'axe des Y et distantes respectivement de Δy et de Δx: les angles des rectangles représentent un système des combinaisons de valeurs x, y, auxquelles correspond un système des valeurs de $z = \mathfrak{F}(x, y)$. La valeur limite du quotient de la somme de ces dernières valeurs divisée par leur nombre, qui est égal au nombre $\frac{K}{\Delta x \, \Delta y}$ des rectangles, donne la moyenne requise. C'est-à-dire que

$$M = lim \frac{\Sigma\Sigma\mathfrak{F}(x, y)}{\frac{K}{\Delta x \, \Delta y}} = \frac{\int\int \mathfrak{F}(x, y)\, dx\, dy}{K}.$$

et comme $K = \int\int dx\, dy$, on a finalement

$$M = \frac{\int\int \mathfrak{F}(x, y)\, dx\, dy}{\int\int dx\, dy},$$

les deux intégrations étendues à la variété K.

146. 3) La grandeur géométrique u est une fonction de trois variables indépendantes x, y, z. Ici, la moyenne d'une fonction $u = \mathfrak{F}(x, y, z)$ pour toutes les combinaisons de valeurs d'une variété continue, donnée, K, des variables x, y, z, est à calculer. On conçoit de nouveau x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace; une partie de l'espace correspond à K; on la décompose en parallélépipèdes par trois systèmes de plans, parallèles respectivement aux plans YZ, ZX, XY et distants respectivement de Δx, de Δy, de Δz; les angles des parallélépipèdes représentent un système des combinaisons de valeurs x, y, z, auxquelles correspond un système des valeurs de $u = \mathfrak{F}(x, y, z)$.

La somme des dernières valeurs divisée par leur quantité $\frac{K}{\varDelta x \varDelta y \varDelta z}$, se rapproche, avec $\varDelta x, \varDelta y, \varDelta z$ diminuant à l'infini, d'une limite qui est égale à la valeur moyenne exigée. C'est conséquemment

$$M = lim \frac{\Sigma\Sigma\Sigma\, \mathfrak{F}(x, y, z)}{\frac{K}{\varDelta x \varDelta y \varDelta z}} = \frac{\iiint \mathfrak{F}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint dx\, dy\, dz},$$

les deux intégrations étendues au domaine de valeurs K.

147. 4) La grandeur géométrique u est une fonction des variables x_1, x_2, $x_3, \ldots$ indépendantes, nombreuses à volonté. Pour déterminer la valeur moyenne d'une fonction $u = \mathfrak{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de variables nombreuses à volonté pour toutes les combinaisons de valeurs de celles-ci, toutes combinaisons qui constituent une variété donnée, continue, K, on imagine la variété continue remplacée par une variété discrète, dans laquelle les valeurs se suivant l'une l'autre des variables se différencient numériquemment, respectivement, de $\varDelta x_1$, de $\varDelta x_2$, de $\varDelta x_3 \ldots$ A chaque combinaison des valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dans cette variété non continue, correspond une valeur de u; la quantité des combinaisons des valeurs est égale au quotient du contenu K de la variété par l'élément de celle-ci $\varDelta x_1\, \varDelta x_2\, \varDelta x_3 \ldots$ La valeur moyenne de la fonction est par conséquent

$$M = lim \frac{\Sigma\Sigma\Sigma \ldots \mathfrak{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{\frac{K}{\varDelta x_1 \varDelta x_2 \varDelta x_3 \ldots}} = \frac{\iiint \ldots \mathfrak{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots) dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots}{\iiint \ldots dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots},$$

les deux intégrations étendues au domaine de valeurs K.

148. Outre ce procédé général, il y a encore des méthodes particulières pour la détermination des valeurs moyennes. L'application de ces méthodes élude fréquemment des intégrations difficiles et embarrassantes. Ces méthodes s'appuient sur des considérations géométriques, sur des propositions générales relatives aux valeurs moyennes, sur la connexion avec le calcul des probabilités, laquelle permet parfois la réduction de questions sur les moyennes en questions beaucoup plus simples sur les probabilités, etc..

PROPOSITIONS ET PROBLÈMES.

149. **Problème I.** — *Trouver la valeur moyenne des ordonnées d'une courbe, lorsqu'elles sont tracées a) de points quelconques de la courbe, b) de points quelconques de l'axe des abscisses. La courbe se trouve d'un seul côté de l'axe des abscisses.*

Solution. — a) Si l'on désigne par y l'ordonnée correspondant à l'arc s de la courbe, par ds l'élément contigu de la courbe, par S la longueur de la courbe entière, on a

$$1) \qquad M_1 = \frac{\int_0^S y\,ds}{S} = Y_1;$$

Y_1 indique l'ordonnée du centre de gravité de la courbe.

Cela conduit à la proposition :

Théorème I. — *La valeur moyenne de l'ordonnée tracée d'un point quelconque d'une courbe est égale à l'ordonnée du centre de gravité de la courbe, supposé que celle-ci soit disposée entièrement d'un côté de l'axe des abscisses.*

Par exemple, pour la valeur moyenne des ordonnées de tous les points d'une demi-circonférence, s'obtient l'expression

$$M = \frac{\int_0^\pi r \sin\theta\, r d\theta}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r.$$

b) Si l'on désigne par y l'ordonnée correspondant à l'abscisse x, par x_0 et par X_0 les abscisses des points terminaux de la courbe, on a

$$M_2 = \frac{\int_{x_0}^{X_0} y\,dx}{X_0 - x_0} = Y_2,$$

Y_2 indique la hauteur d'un rectangle qui se trouvant sur la ligne de base $X_0 - x_0$ possède la même surface que la courbe.

D'après cela, se formule le théorème suivant :

Théorème II. — *La valeur moyenne de l'ordonnée dépendante d'une abscisse quelconque d'une courbe est égale à la hauteur d'un rectangle qui reposant sur la même partie de l'axe des abscisses a la même aire que la courbe.*

Conformément à cette proposition, la valeur moyenne de toutes les ordonnées d'un demi-cercle de rayon r, élevées sur le diamètre, est égale à

$$M = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{4} r.$$

150. **Problème II**. — *Calculer le moyen rayon vecteur d'une courbe, lorsqu'il est conduit a) à un point quelconque de la courbe, b) suivant un angle quelconque avec l'axe polaire.*

Solution. — a) On désigne par ϱ le rayon vecteur qui découpe de la courbe l'arc s, par ds l'élément adjacent de la courbe, par S la longueur de la courbe; on a

$$1) \qquad M_1 = \frac{\int\limits_0^S \varrho\, ds}{S}.$$

L'évaluation du moyen rayon vecteur d'une ellipse, tracé d'un des foyers de celle-ci, peut servir d'exemple. x, y sont les coordonnées centrales d'un point de l'ellipse et on pose $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$. On a

$$\varrho = a - \frac{c}{a} x = a - c \cos \varphi, \quad ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi;$$

conséquemment

$$M = \frac{\int\limits_0^{2\pi} (a - c \cos \varphi) \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi}{S} = \frac{aS}{S} = a,$$

parce que

$$\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi = S$$

et est

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos \varphi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi = 0$$

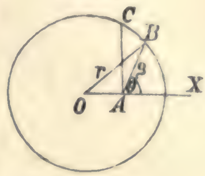
b) On désigne par ϱ le rayon vecteur qui correspond à l'amplitude θ, par θ_1 et par θ_2 les amplitudes des points terminaux de la courbe. On a

$$2) \qquad M_2 = \frac{\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho\, d\theta}{\theta_2 - \theta_1}.$$

La distance moyenne, mesurée dans une direction quelconque, d'un point donné à l'intérieur d'un cercle, à la circonférence, peut être calculée comme exemple.

Soit O (fig. 83) le centre du cercle, A le point donné, $OA = c$, r le rayon du cercle, $AB = \varrho$ la longueur du rayon vecteur mené suivant l'angle $XAB = \theta$, on a

Fig. 83



$$\varrho = r\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}\sin^2\theta} - c\cos\theta;$$

par conséquent,

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{r\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}\sin^2\theta} - c\cos\theta\right\}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}\sin^2\theta}\,d\theta,$$

c'est-à-dire que la distance moyenne demandée est le rayon d'un cercle qui a la même longueur qu'une ellipse ayant pour demi-axes r et $\sqrt{r^2 - c^2} = AC$.

151. **Problème III.** — *Un point matériel, sous l'influence d'une force centrale, décrit une trajectoire elliptique; déterminer la valeur moyenne des éloignements de ce point, mesurés à des instants quelconques, du centre de force (qui coïncide avec un foyer de l'ellipse).*

Solution. — On désigne par ϱ le rayon vecteur du point mobile à l'instant t (compté à partir du périhélie); on a

$$M = \frac{\int \varrho\, dt}{\int dt},$$

les deux intégrations étendues à un circuit complet ou à un demi-circuit. Maintenant, si $d\theta$ est l'angle que le rayon vecteur parcourt en l'élément de temps le plus prochain dt, en vertu de la deuxième loi de KEPLER, est

$$\frac{1}{2}\varrho^2\, d\theta = \varkappa\, dt,$$

dans laquelle expression $\varkappa$ désigne une constante. A la considération de cette relation, est

$$1) \qquad M = \frac{\int_0^\pi \varrho^3\, d\theta}{\int_0^\pi \varrho^2\, d\theta}.$$

Si a est le demi-grand-axe, ε l'excentricité relative, $p = a(1 = \varepsilon^2)$ le paramètre de la trajectoire elliptique, avec la conservation du mode de calcul antérieur, est

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

et

$$\int_0^\pi \varrho^3 d\theta = p^3 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 - \varepsilon \cos\theta)^3} = p^3 \int_0^\pi \frac{\sec^4 \frac{1}{2}\theta \, d(2 \tang \frac{1}{2}\theta}{\{1 - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \tang^2 \frac{1}{2}\theta\}^3};$$

si l'on pose $\tang \frac{1}{2}\theta = x$ et par là $(1 + \varepsilon)x^2 = (1 - \varepsilon)y^2$, 0 et ∞ deviennent les nouvelles limites et

$$\int_0^\pi \varrho^3 d\theta = \frac{2p^3}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty \frac{\{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon) y^2\}^2}{(1 + y^2)^3} dy;$$

avec la substitution $y = \tang \omega$, cela donne enfin

$$2) \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi \varrho^3 d\theta &= \frac{2p^3}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(1 + \varepsilon) \cos^2 \omega + (1 - \varepsilon) \sin^2 \omega\}^2 d\omega \\ &= \frac{2p^3}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \varepsilon \cos 2\omega)^2 d\omega \\ &= \frac{\pi p^3}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

L'intégrale au dénominateur de l'expression de M, c'est-à-dire $\int_0^\pi \varrho^2 d\theta$, représente la superficie de la surface de l'ellipse; donc est

$$3) \qquad \int_0^\pi \varrho^2 d\theta = \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les valeurs 2) et 3) introduites dans 1), donnent

$$4) \qquad M = \frac{p^3}{a^2(1 - \varepsilon^2)^3} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = a \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right).$$

152. **Problème IV.** — *Découvrir l'éloignement moyen de deux points qui sont pris arbitrairement sur la circonférence d'un cercle donné.*

Solution. — Visiblement, il est loisible de fixer l'un des deux points (A) et de renfermer l'autre (B) dans une demi-circonférence. Maintenant, si l'on désigne par θ l'angle que la corde AB enserre avec le diamètre mené par A, par r le rayon du cercle, on a

$$AB = 2r\cos\theta, \qquad ds = 2r\,d\theta;$$

par conséquent,

$$M = \frac{4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta}{\pi r} = \frac{4}{\pi}\,r.$$

153. **Problème V.** — *Dans une droite limitée, trouver la distance moyenne d'un point pris arbitrairement à une extrémité.*

Solution. — La simple réflexion enseigne que la distance moyenne demandée est égale à la moitié de la droite donnée.

154. **Problème VI.** — *Calculer l'éloignement moyen de deux points pris à volonté dans une droite limitée* $AB = a$.

Solution. — Soient P, Q les deux points, $AP = x$, $AQ = y$; on a

$$M = \frac{\int_0^a\int_x^a (y-x)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_x^a dx\,dy} = \frac{a}{3}.$$

155. **Théorème III.** — *Dans chaque domaine de deux domaines* A, B *(lignes, surfaces, espaces), extérieurs l'un à l'autre, un point est pris arbitrairement.* M *désigne une valeur moyenne relative à la situation réciproque de la couple de points produite et* M', M_A, M_B *sont des valeurs moyennes de même espèce, relatives cependant à deux points pris à volonté respectivement dans le domaine total* A + B, *dans* A, *dans* B. *La relation suivante existe :*

$$(A + B)^2 M' = 2\,AB\,M + A^2 M_A + B^2 M_B.$$

Solution. — Nous décomposons la somme des grandeurs géométriques en question, qui peuvent provenir de la prise arbitraire de deux points dans le domaine total $A + B$, en ses parties composantes. Celles-ci correspondent, par ordre, aux cas où le premier point gît dans A, le second dans B; puis aux cas inverses; ensuite aux cas où les deux points gisent dans A, les deux points dans B; donc, si nous désignons les sommes correspondantes par S_{A+B}, S_A, etc., nous avons

$$S_{A+B} = S_{A,B} + S_{B,A} + S_A + S_B,$$

ou, à cause de $S_{A,B} = S_{B,A}$,

$$S_{A+B} = 2S_{A,B} + S_A + S_B.$$

Comme $S_A = A^2 M_A$, $S_{A,B} = ABM$, etc., la relation affirmée plus haut s'ensuit, savoir

1) $$(A + B)^2 M' = 2ABM + A^2 M_A + B^2 M_B.$$

Pour le cas $A = B$, cette relation se simplifie et devient

2) $$2M' = M + M_A.$$

156. **Problème VII.** — *Une droite limitée* AB = a *est divisée en deux parties par un point pris à volonté et, dans chacune de ces parties, un point est ensuite marqué arbitrairement. Trouver l'éloignement moyen des deux derniers points produits.*

Solution. — x et $a - x$ sont les deux parties de AB formées par le premier point; M_x est la valeur moyenne correspondant à cette division; suivant le théorème du n° 155 et avec prise en considération du n° 154, est

$$a^2 \frac{a}{3} = 2x(a - x) M_x + x^2 \frac{x}{3} + (a - x)^2 \frac{(a - x)}{3};$$

d'où, après simple réduction, résulte

$$M_x = \frac{a}{2};$$

la valeur moyenne est donc indépendante de la proportion de la division.

157. **Théorème IV.** — *Dans chaque domaine de deux domaines* A + C, C + B *(lignes, surfaces, espaces) se courrant partiellement, un point est pris arbitrairement.* M *désigne une*

valeur moyenne relative à la position mutuelle de la couple de points produite, et M′, M_A, M_B, M_C *sont des valeurs moyennes de nature semblable, relatives cependant à deux points pris à volonté respectivement dans le domaine total* A + C + B = G, *dans* A, *dans* B, *dans* C. *La relation suivante est valable :*

$$2(A+C)(C+B)M = G^2 M' + C^2 M_C - A^2 M_A - B^2 M_B.$$

Démonstration. — La somme des grandeurs géométriques qui peuvent prendre naissance dans la prise des deux points dans le domaine total $A + C + B$ se décompose en plusieurs parties composantes qui correspondent aux cas suivants : le premier point gît dans $A + C$, le second dans $C + B$; puis l'ordre inverse de ces points; ensuite les deux points se trouvent dans A, les deux dans B. Mais les cas où les deux points se trouvent dans C sont comptés doublement; ces cas doivent donc être déduits une fois. Avec les désignations employées au n° 155, on a

$$S_G = S_{A+C,\,C+B} + S_{C+B,\,A+C} - S_C + S_A + S_B,$$

et cela donne, à cause de $S_{A+C,\,C+B} = S_{C+B,\,A+C}$, la proposition énoncée ci-dessus :

$$2(A+C)(C+B)M = G^2 M' + C^2 M_C - A^2 M_A - B^2 M_B.$$

Avec $C = O$, on est ramené à la proposition du n° 155.

158. **Problème VIII.** — *Dans chacune des deux droites limitées* AB, CD, *qui ont la partie commune* CB, *un point est pris à volonté; trouver l'éloignement moyen de la couple de points produite.*

Solution. — Par utilisation de la proposition du n° 157 et par le n° 154, s'obtient l'équation

$$2\,AB\cdot CD\cdot M = \overline{AD}^2\cdot\frac{AD}{3} + \overline{CB}^2\cdot\frac{CB}{3} - \overline{AC}^2\cdot\frac{AC}{3} - \overline{BD}^2\cdot\frac{BD}{3};$$

de laquelle, résulte

$$M = \frac{\overline{AD}^3 + \overline{CB}^3 - \overline{AC}^3 - \overline{BD}^3}{6\,AB\,.\,CD}.$$

159. **Problème IX.** — *Dans la surface d'un cercle donné, un point est pris à volonté et par celui-ci est menée une corde dans une direction quelconque; trouver la longueur moyenne de cette corde.*

Solution. — Si O est le centre, r le rayon du cercle donné, P le point pris à volonté, $OP = x$ et, θ l'angle sous lequel la corde AB menée par P est inclinée vers le diamètre tracé par P, on a

$$AB = 2\,(r^2 - x^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}},$$

et la somme de toutes les cordes est exprimée par

$$\int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,(r^2 - x^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\, 2\pi x\, dx\, d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{4}{3}\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^3\theta}{1-\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{4}{3}\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos\theta+\cos^2\theta}{1+\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{d\,\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + \cos\theta\, d\theta \right\} = \frac{8}{3}\pi r^3;$$

leur quantité est exprimée par $\frac{\pi}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi^2}{2} r^2$; conséquemment, la valeur moyenne requise est

$$M = \frac{16}{3\pi}\, r$$

160. **Problème X.** — *Trouver la distance moyenne d'un point de la circonférence à tous les points de la surface du cercle.*

Solution. — On choisit le point de la circonférence pour pôle, le diamètre passant par ce point pour axe polaire; on a

$$M = \frac{\int\int \varrho\, dJ}{\int\int dJ} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2r\cos\theta} \varrho^2\, d\theta\, d\varrho}{\pi r^2} = \frac{32}{9\pi}\, r.$$

161. **Problème XI.** — *Trouver l'éloignement moyen de deux points pris arbitrairement dans la surface d'un cercle donné.*

Solution. — On désigne par r le rayon du cercle et par M la valeur moyenne requise; la somme des éloignements de toutes les couples de points est exprimée par

$$(\pi r^2)^2 M.$$

Elle varie, lorsque r est augmenté de $d\,r$, de

$$d\,\{(\pi r^2)^2 M\}.$$

Mais aussi par une autre voie, cette variation peut être trouvée, puisqu'elle provient des couples de points, desquelles l'un ou l'autre point tombe dans l'anneau circulaire résultant; elle s'élève à

$$2 \,.\, 2\pi r\, dr \,.\, \Sigma,$$

si Σ désigne la somme des éloignements d'un point de la circonférence du cercle donné, de tous les points de sa surface. Par utilisation de la valeur moyenne de ces éloignements trouvée dans le problème précédent est

$$\Sigma = \pi r^2 \cdot \frac{32}{9\pi} r = \frac{32}{9} r^3.$$

Pour la détermination de M, se livre par conséquent l'équation

$$d\,\{(\pi r^2)^2 M\} = \frac{128}{9} \pi r^4\, d\,r,$$

de laquelle, par intégration, résulte

$$\pi^2 r^4 M = \frac{128}{9} \pi \int_0^r r^4\, d\,r = \frac{128}{45} \pi r^5$$

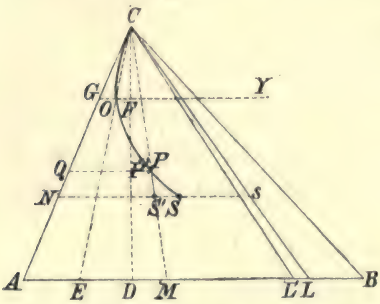
et ensuite

$$M = \frac{128}{45\pi} r.$$

162. **Théorème V.** — *L'éloignement moyen d'un sommet d'un triangle, de tous les points de la surface du triangle, est égal à la distance de ce sommet au centre de gravité du triangle, mesurée le long d'une parabole qui abandonne le sommet dans la direction de l'un des deux côtés émanant de lui et atteint le centre de gravité dans la direction de l'autre côté.*

Solution. — Soit ABC (fig. 84, p. 198) le triangle donné avec les côtés a, b, c; S son centre de gravité; et qu'il s'agisse de l'éloignement moyen du sommet C des points de la surface du triangle. On mène par C un rayon CL, on tourne celui-ci de la position CB à la position CA et on transpose continûment la surface découpée à droite par ce rayon vers le sommet C. Par cela, le centre de gravité de la masse entière se mouvra de la position d'origine S, le long d'une courbe, vers la position finale C, et cette courbe, comme maintenant il faut le démontrer, est la parabole mentionnée plus haut.

Fig. 84.



Supposé que le centre de gravité de la masse entière se trouve en P, lorsque le rayon a atteint la position CL, pendant qu'il s'avance jusqu'à la position voisine CL', P exécute un mouvement élémentaire PP', qui est parallèle à CL, parce que le centre de gravité s de l'élément de masse CLL' avance vers C le long de CL. La grandeur de ce mouvement résulte de la proportion

$$PP' : \frac{2}{3}\, CL = CLL' : ABC,$$

c'est-à-dire que

$$PP' = \frac{CLL'}{ABC} \cdot \frac{2}{3}\, CL.$$

La longueur de la courbe décrite pendant la marche complète est

$$arc\ CS = \Sigma\, PP' = \frac{1}{ABC} \Sigma\, CLL' \cdot \frac{2}{3}\, CL,$$

la sommation étendue au mouvement complet de CL. Mais $\frac{2}{3}\, CL$ est l'éloignement moyen des points de l'élément CLL', de C; par conséquent, $CLL' . \frac{2}{3}\, CL$, la somme des éloignements des points de cet élément, de C; donc $\Sigma CLL' . \frac{2}{3}\, CL$, la somme analogue pour le triangle entier ABC. Il s'ensuit que $\frac{1}{ABC} \cdot \Sigma CLL' \cdot \frac{2}{3} CL$ est en réalité l'éloignement moyen du sommet C de tous les points de la surface du triangle.

Pour démontrer que la courbe CPS est une parabole, nous la rapportons à un système de coordonnées, dans lequel C est l'origine, CA l'axe des abscisses et une parallèle à AB l'axe des ordonnées; ensuite est $CQ = x$, $QP = y$. Comme P doit se trouver sur la ligne de jonction du centre de gravité S' du triangle ALC et de C, de la similitude des triangles CQP, CAM, résulte la proportion

1) $$x : y = b : \frac{AL}{2};$$

d'un autre côté, parce que P est le centre de gravité de la masse concentrée en C du triangle CLB et de la masse concentrée en S' du triangle CAL, existe la proportion

$$CP : PS' = CAL : CLB = AL : LB,$$

de laquelle, résulte

$$AL : (AL + LB) = CP : (CP + PS'),$$

ou

$$AL : c = CP : CS' = x : \frac{2}{3} b,$$

ou enfin

$$\frac{AL}{2} = \frac{3cx}{4b}$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation 1), se donne

$$x^2 = \frac{4b^2}{3c} y$$

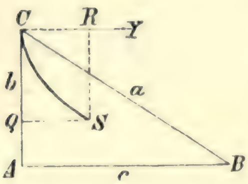
pour l'équation de la courbe CPS, qui par conséquent est une parabole. Qu'elle est tangentielle au côté AC en C et atteint S dans la direction du côté CB, ces faits s'obtiennent immédiatement par la considération précédente.

On dessine CD perpendiculaire à AB, divise en deux parties égales AD par E; la parabole est coupée en un point O; on mène par celui-ci GFY parallèle à AB, ainsi est $OF = OG$; par conséquent O est le sommet et OY l'axe de la parabole.

163. **Problème XII.** — *Calculer l'éloignement moyen de tous les points d'un triangle rectangle, d'une extrémité de l'hypothénuse.*

Solution. — Conformément à la proposition du n° 162, l'éloignement moyen demandé est mesuré par l'arc de parabole CS (fig. 85). Par les coordonnées de son extrémité S, qui sont

Fig. 85.



$$x = CQ = \frac{2}{3} b, \quad y = QS = \frac{1}{3} c,$$

on obtient le paramètre

$$2p = \frac{4}{3} \frac{b^2}{c}.$$

La longueur de l'arc est donnée par l'expression

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{x \sqrt{p^2 + x^2}}{p} + pl \frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p} \right\};$$

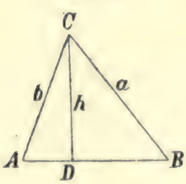
on introduit, pour x et pour p, les valeurs assignées plus haut, et on obtient

$$M = \frac{1}{3} \left(a + \frac{b^2}{c} l \cdot \frac{a + c}{b} \right).$$

164. **Problème XIII.** — *Calculer l'éloignement moyen des points d'un triangle quelconque, d'un de ses points d'angle.*

Solution. — On décompose le triangle donné ABC (fig. 86) par la hauteur $CD = h$, abaissée de l'angle C considéré, en deux triangles rectangles. On désigne par M_1 l'éloignement moyen de l'angle C, des points du triangle ADC, par M_2 la grandeur analogue pour le triangle DBC; la valeur moyenne exigée est

Fig. 86.



$$M = \frac{M_1 \cdot ADC + M_2 \cdot DBC}{ABC} = \frac{M_1 \cdot AD + M_2 \cdot DB}{c}.$$

On introduit, pour M_1, M_2, les valeurs formées d'après la formule de conclusion du n° 163; il vient

$$M = \frac{1}{3c}\left(b \cdot AD + h^2 l \cdot \frac{b + AD}{h} + a \cdot BD + h^2 l \cdot \frac{a + BD}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{3c}\left(b \cdot AD + a \cdot BD + h^2 l \cdot \frac{(b + AD)(a + BD)}{h^2}\right);$$

maintenant est

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2c . BD,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c . AD,$$

de là, après quelques transformations,

$$b \cdot AD + a \cdot BD = c\,\frac{a + b}{2} + \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{2c},$$

$$\frac{(b + AD)(a + BD)}{h^2} = \frac{a + b + c}{a + b - c},$$

de manière que, finalement,

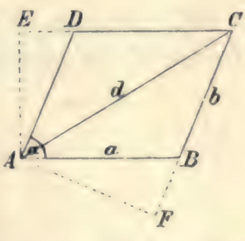
$$1) \quad M = \frac{1}{3}\left\{\frac{a + b}{2} + \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{2c^2} + \frac{h^2}{c}\, l \cdot \frac{a + b + c}{a + b - c}\right\}.$$

Pour un triangle équilatéral de côté a, se donne

$$2) \quad M = \frac{a}{3}\left(1 + \frac{3}{4}\, l \cdot 3\right).$$

165. **Problème XIV.** — *Trouver l'éloignement moyen des points d'un parallélogramme, d'un de ses points d'angle.*

Fig. 87.



Solution. — Soit $ABCD$ (fig. 87) le parallélogramme, $AB = DC = a$, $AD = BC = b$, l'angle $BAD = \alpha$. Si la valeur moyenne cherchée doit se rapporter au point d'angle A, on décompose le parallélogramme, par la diagonale $AC = d$, en triangles; si M_1, M_2 sont les valeurs moyennes relatives à ces triangles, ABC, ACD, la valeur moyenne requise est

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

On introduit, pour M_1, M_2, les valeurs formées suivant la prescription de la formule 1) du n° 164; d'abord est

$$M = \frac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a+d}{2} + \dfrac{(d^2-a^2)(d-a)}{2b^2} + \dfrac{a^2 \sin^2\alpha}{b}\, l \cdot \dfrac{a+d+b}{a+d-b} \\ + \dfrac{b+d}{2} + \dfrac{(d^2-b^2)(d-b)}{2a^2} + \dfrac{b^2 \sin^2\alpha}{a}\, l \cdot \dfrac{b+d+a}{b+d-a} \end{array}\right\};$$

en tenant compte des relations

$$d^2 - a^2 = b^2 + 2ab\cos\alpha, \quad d^2 - b^2 = a^2 + 2ab\cos\alpha,$$

on a

$$1)\left\{\begin{array}{l} M = \dfrac{1}{6}\left\{ 2d + \dfrac{a^2+b^2}{ab} d\cos\alpha - \dfrac{a^3+b^3}{ab}\cos\alpha + \dfrac{a^2\sin^2\alpha}{b}\, l \cdot \dfrac{a+d+b}{a+d-b} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{b^2\sin^2\alpha}{a}\, l \cdot \dfrac{b+d+a}{b+d-a} \right\}. \end{array}\right.$$

Pour un rectangle, plus simplement devient

$$2) \qquad M = \frac{1}{3}\left\{ d + \frac{b^2}{2a}\, l \cdot \frac{a+d}{b} + \frac{a^2}{2b}\, l \cdot \frac{b+d}{a} \right\}.$$

De cela, par exemple, résulte l'éloignement moyen des points d'un carré, dont le côté est a, D'UN POINT D'ANGLE,

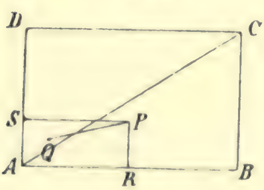
$$3) \qquad M = \frac{a}{6}\left\{ 2\sqrt{2} + l\,.\,(1+\sqrt{2}) \right\},$$

et DU POINT MILIEU

$$4) \qquad M' = \frac{M}{2} = \frac{a}{12}\left\{ 2\sqrt{2} + l\,.\,(1+\sqrt{2}) \right\}.$$

166. **Problème XV**. — *Calculer l'éloignement moyen de deux points quelconques d'un rectangle donné.*

Fig. 88.



Solution. — Soit $ABCD$ (fig.88) le rectangle donné, $AB = a$, $AD = b$, $AC = d$, P l'un des deux points choisis arbitrairement, $AR = x$, $AS = y$. On fixe le point P [1] et on renferme l'autre Q dans le rectangle $ARPS$; la somme des éloignements relatifs PQ est exprimé par

[1] Dit plus exactement : on le renferme dans l'élément contigu $dx\,dy$ du rectangle.

$$m\,xy\,dx\,dy,$$

si m désigne l'éloignement moyen du point P, de tous les points du rectangle $ARPS$. Maintenant, pour épuiser toutes les couples de points, on a à intégrer l'expression écrite dans les limites 0 et a par rapport à x, et dans les limites 0 et b par rapport à y; et, à multiplier le résultat par 4. Mais comme d'un autre côté la somme de tous les éloignements PQ est exprimée par $a^2 b^2 M$, lorsque M désigne leur valeur moyenne, on a, pour la découverte de cette valeur, l'équation

$$a^2 b^2 M = 4 \int_0^a \int_0^b m\, xy\, dx\, dy,$$

de laquelle, résulte, si on introduit pour m l'expression formée suivant la formule 2) du n° 165,

$$M = \frac{4}{3a^2b^2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{2x} l \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} + \frac{x^2}{2y} l \cdot \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \right\} xy\, dx\, dy.$$

Pour la première intégrale, on trouve facilement

$$\int_0^a \int_0^b \sqrt{x^2+y^2}\, xy\, dx\, dy = \frac{d^5 - a^5 - b^5}{15};$$

quant à la deuxième, si l'on intègre d'abord par rapport à y. l'intégration par parties conduit au but, en posant

$$y^3\, dy = du, \quad l \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x} = v;$$

elle devient

$$\int_0^a \int_0^b \frac{y^3}{2} l \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\, dx\, dy = \frac{ab^4}{8} l \cdot \frac{a+d}{b} - \frac{b^4 d}{8} + \frac{b^5}{10}$$
$$+ \frac{a^5}{60} + \frac{b^2 - 2a^2}{72} d^3 + \frac{d^5}{90};$$

la valeur de la troisième intégrale se livre par celle-ci par permutation des lettres a et b.

Si l'on introduit les trois valeurs trouvées à l'instant dans l'équation ci-dessus écrite pour M, se donne, après réduction correspondante,

$$1)\quad M=\frac{1}{15}\left\{\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}+d\left(3-\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{b^2}{a}l\cdot\frac{a+d}{b}+\frac{a^2}{b}l\cdot\frac{b+d}{a}\right)\right\}.$$

Pour un carré dont le côté est a, on a plus simplement

$$2)\qquad M=\frac{a}{15}(2+\sqrt{2}+5\,l\,.[1+\sqrt{2}]).$$

167. **Problème XVI**. — *Trouver la distance moyenne de deux points pris arbitrairement à l'intérieur d'une courbe quelconque fermée et convexe.*

Solution. — Soit L la longueur de la courbe, J la surface renfermée par elle.

On part d'une position des points P, Q, pour laquelle ils ont la distance z; on désigne l'élément de surface en P par dP, en Q par dQ; on a

$$1)\qquad M=\frac{\iint z\,d\,P\,d\,Q}{J^2},$$

les deux intégrations du numérateur étendues à la surface entière.

D'un autre côté,

$$\frac{2z}{L}\cdot\frac{d\,P\,d\,Q}{J^2}$$

est la probabilité pour qu'une sécante menée à volonté de la courbe comprenne les points P, Q, lors de la position prise de ceux-ci, et la probabilité totale de toutes les positions des points P, Q s'énonce

$$2)\qquad \omega=\frac{2}{L}\frac{\iint z\,d\,P\,d\,Q}{J^2},$$

les intégrations étendues comme plus haut. Par l'égalité de 1) et de 2), se donne

$$3)\qquad \omega=\frac{2\,M}{L};$$

par laquelle équation le présent problème sur les valeurs moyennes est mis en corrélation avec celui du n° 121 sur les probabilités, de sorte que lorsque l'un est résolu, l'autre l'est aussi.

Pour la probabilité se trouvant en question, une autre expression peut encore être déduite. On considère une position particulière de la sécante; par rapport à un pôle choisi à l'intérieur de la courbe, les coordonnées p, θ sont attribuées à cette sécante qui décompose la surface en les segments Σ, Σ'; la probabilité pour que les deux points pris arbitrairement viennent à se trouver de côté et d'autre de la sécante s'exprime par

$$2\frac{dp\,d\theta}{L}\frac{\Sigma\Sigma'}{J^2};$$

la probabilité totale, par conséquent, est

$$4)\qquad \omega=\frac{2}{LJ^2}\int\int\Sigma\Sigma'\,dp\,d\theta,$$

l'intégration étendue à toutes les sécantes de la courbe. De l'égalité de 3) et de 4), résulte

$$5)\qquad M=\frac{1}{J^2}\int\int\Sigma\Sigma'\,dp\,d\theta.$$

Mais, dans l'équation α) du n° 121, est trouvé

$$\omega=\frac{1}{3LJ^2}\int\int C^4\,dp\,d\theta,$$

où C indique la longueur de la corde découpée sur la sécante. Cette expression, dans la jonction avec 4), conduit à la relation remarquable

$$6)\qquad \int\int C^4\,dp\,d\theta=6\int\int\Sigma\Sigma'\,dp\,d\theta,$$

qui, de nouveau, en liaison avec 5), fournit une nouvelle expression pour M, savoir

$$7)\qquad M=\frac{1}{6J^2}\int\int C^4\,dp\,d\theta.$$

La distance moyenne de deux points d'un triangle équilatéral servira comme premier exemple. A l'aide de la valeur de la probabilité trouvée dans le n° 123,

$$\omega=\frac{2}{15}+\frac{1}{10}\,l\,.\,3,$$

on obtient, en se basant sur la formule 3),

$$M = \frac{3a}{5}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\, l \cdot 3\right),$$

lorsque la longueur du côté du triangle est désignée par a.

Comme second exemple, peut servir l'évaluation de la probabilité pour qu'une droite menée à volonté, coupant le périmètre d'un carré, comprenne deux points pris arbitrairement dans la surface du carré.

Avec utilisation de la formule 3) et de la valeur trouvée pour M dans l'équation 2) du n° 166, se donne

$$\omega = \frac{1}{30}(2 + \sqrt{2} + 5\, l.[1 + \sqrt{2}]).$$

168. **Théorème VI**. — *La distance moyenne des points d'une figure plane à une droite disposée dans le plan de la figure ne coupant pas son périmètre est égale à la distance du centre de gravité de la figure à cette droite.*

Démonstration. — On se représente la figure décomposée en bandes élémentaires par des lignes droites parallèles à la droite donnée; dJ est la bande dont les lignes de limitation ont les distances y et $y + dy$ à la droite;

$$M = \frac{\int\int y\, dJ}{\int\int dJ} = Y$$

est la valeur moyenne requise; donc, comme les deux intégrations sont à étendre à la surface entière de la figure, réellement cette valeur moyenne est égale à la distance du centre de gravité à la droite donnée.

169. **Problème XVII**. — *Une droite délimitée est divisée arbitrairement en trois parties; trouver la valeur moyenne de la plus grande partie, de l'intermédiaire et de la plus petite.*

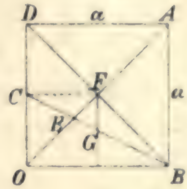
Solution. — Soit a la longueur de la droite; soient désignées les parties, de grandeurs décroissantes, par x, par y, par $z = a - x - y$; on a

1) $$x > y > a - x - y > 0.$$

On considère x, y comme les cordonnées rectangulaires d'un point P par rapport aux axes OD, OB (fig. 89, p. 207); le point P, si x, y doivent correspondre aux conditions 1), doit se renfermer dans le triangle BEF qui est formé par les droites

$$OA \ldots x = y,$$
$$BC \ldots y = a - x - y,$$
$$BD \ldots a - x - y = 0.$$

Fig. 89.



Conformément à la proposition du n° 168, la valeur moyenne de x est donc l'abscisse, la valeur moyenne de y l'ordonnée du centre de gravité de ce triangle dont les angles ont les coordonnées $B(a, 0)$, $E\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$, $F\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, c'est-à-dire c'est

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{11}{18}a, \\ M_y = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{5}{18}a, \\ M_z = \frac{2}{18}a. \end{array} \right.$$

170. **Problème XVIII.** — *Quelle valeur moyenne a respectivement le plus grand côté, le côté intermédiaire et le plus petit côté de tous les triangles de même périmètre?*

Solution. — Si l'on conserve les désignations du numéro précédent pendant que a indique le périmètre donné, aux relations 1) s'ajoute encore la suivante :

$$2) \qquad x \leqq y + (a - x - y)$$

qui, par l'interprétation géométrique (fig. 89), conduit à une droite

$$GF \ldots x = \frac{a}{2},$$

laquelle, avec les droites antérieurement nommées, sépare le triangle EFG comme domaine des points P dont les coordonnées satisfont aux conditions 1) du n° 169 et 2) du n° 170. Conséquemment, à cause de la proposition du n° 168, est

$$3)\quad \begin{cases} M_x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{16}{36}a, \\ M_y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a\right) = \frac{13}{36}a, \\ M_z = \frac{7}{36}a. \end{cases}$$

171. **Problème XIX**. — *Calculer la distance moyenne d'un point de la surface sphérique à tous les points à l'intérieur de la sphère.*

Solution. — On se représente la sphère engendrée par la révolution d'un demi-cercle autour de son diamètre $AB = 2r$. Soient ϱ, θ les coordonnées polaires d'un point dans la surface du demi-cercle, par rapport à AB, comme axe polaire, et par rapport au point A comme pôle; l'élément de surface $\varrho d\theta d\varrho$, lors de la révolution, décrit un élément d'espace, $2\pi\varrho \sin\theta . \varrho d\theta d\varrho = 2\pi\varrho^2 \sin\theta d\theta d\varrho$, dont tous les points possèdent la distance ϱ de A. La distance moyenne requise est donc

$$M = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2r\cos\theta} 2\pi\varrho^3 \sin\theta \, d\theta \, d\varrho}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 6r \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{6}{5} r.$$

172. **Problème XX.** — *Trouver la distance moyenne de deux points qui sont pris à volonté dans l'espace d'une sphère donnée.*

Solution. — Puisque $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2$ est la quantité de toutes les couples de points ou des distances, leur somme, lorsque M désigne la valeur moyenne de ces dernières, est

$$1)\qquad S = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2 M.$$

Cette somme varie de dS, lorsque le rayon de la sphère s'accroît de dr; c'est-à-dire que s'associent à S les distances qui ont l'un ou l'autre point terminal dans l'enveloppe sphérique ajoutée. Pour la somme de ces distances, s'obtient, lorsque M_0 indique la valeur moyenne des distances d'un point de la surface sphérique à tous les points de l'espace sphérique, l'expression

$$2 \cdot 4\pi\, r^2\, dr \cdot \frac{4}{3}\, \pi\, r^3\, M_0;$$

de sorte que, lorsqu'on introduit pour M_0 la valeur trouvée dans le n° 171, on obtient

$$d\,S = \frac{64}{5}\, \pi^2\, r^6\, dr.$$

De cette équation, résulte, par intégration,

$$2) \qquad S = \frac{64}{5}\, \pi^2 \int_0^r r^6\, d\,r = \frac{46}{35}\, \pi^2\, r^7,$$

et, par 1) et 2), se donne enfin

$$3) \qquad M = \frac{36}{35}\, r.$$

173. **Théorème VII**. — *La distance moyenne des points d'un solide à un plan qui n'en coupe pas la surface est égale à la distance du centre de gravité de ce solide à ce plan.*

Démonstration. — Le solide est divisé en couches infiniment minces par des plans parallèles au plan donné et $d\,V$ est le volume des couches dont les plans de limitation ont les distances y et $y + d\,y$ au plan donné; ainsi se livre, pour la valeur moyenne exigée, l'expression

$$M = \frac{\int y\, d\, V}{\int d\, V} = Y,$$

les deux intégrations étendues au solide entier. L'interprétation de Y correspond effectivement à la proposition établie.

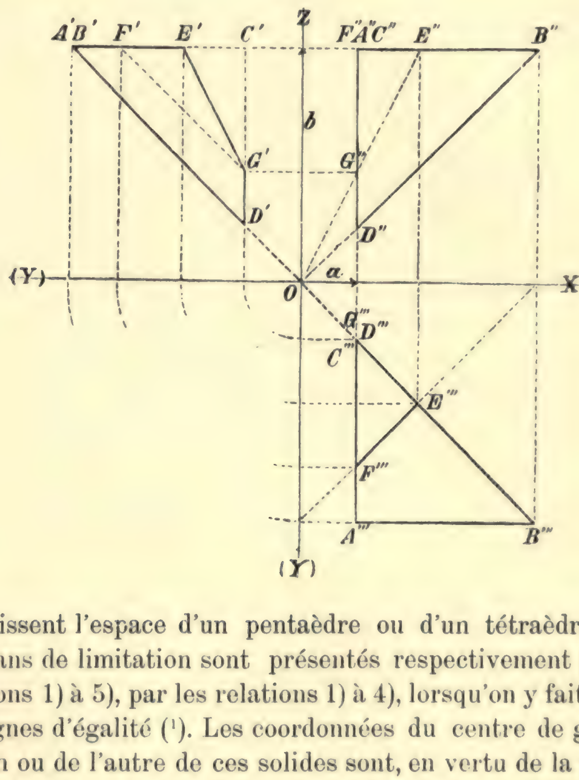
174. **Problème XXI**. — *Calculer les valeurs moyennes des côtés rangés par ordre de grandeur de tous les triangles dont les côtés sont compris entre les limites données* a *et* b.

Solution. — Les côtés rangés par ordre de grandeur croissante d'un des triangles peuvent être désignés par x, y, z; ces côtés sont liés aux conditions suivantes :

1) $$x \geqq a,$$
2) $$z \leqq b,$$
3) $$x \leqq y,$$
4) $$y \leqq z,$$
5) $$z \leqq x + y.$$

Si x, y, z sont envisagés comme les coordonnées rectangulaires d'un point, les points qui satisfont aux conditions 1) à 5)

Fig. 90.



remplissent l'espace d'un pentaèdre ou d'un tétraèdre dont les plans de limitation sont présentés respectivement par les relations 1) à 5), par les relations 1) à 4), lorsqu'on y fait valoir les signes d'égalité [1]. Les coordonnées du centre de gravité de l'un ou de l'autre de ces solides sont, en vertu de la proposition du n° 173, les valeurs moyennes de x, y, z.

1. Est $b > 2a$, les plans 1) à 5) limitent un pentaèdre $ABDGEF$ qui, dans la fig. 90, est représenté par ses

[1] Comp. au n° 15.

projections sur les trois plans coordonnés et peut être envisagé comme la différence entre les tétraèdres $ABCD$ et $EFCG$. Les volumes de ces tétraèdres sont

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}(b-a)^3, \\ V' &= \frac{1}{12}(b-2a)^3, \end{aligned}\right.$$

et comme leurs points d'angle ont les coordonnées suivantes à lire facilement sur la figure :

	x	y	z
A	a	b	b
B	b	b	b
C	a	a	b
D	a	a	a
E	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}b$	b
F	a	$b-a$	b
G	a	a	$2a$,

au centre de gravité du tétraèdre $ABCD$, échoient les coordonnées

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{a+b+a+a}{4} = \frac{1}{3}(3a+b), \\ Y &= \frac{b+b+a+a}{4} = \frac{1}{2}(a+b), \\ Z &= \frac{b+b+b+a}{4} = \frac{1}{4}(a+3b), \end{aligned}\right.$$

au centre de gravité du tétraèdre $EFCG$ les coordonnées

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= \frac{\frac{1}{2}b+a+a+a}{4} = \frac{1}{4}\left(3a+\tfrac{1}{2}b\right), \\ Y' &= \frac{\frac{1}{2}b+(b-a)+a+a}{4} = \frac{1}{4}\left(a+\tfrac{3}{2}b\right), \\ Z' &= \frac{b+b+b+2a}{4} = \frac{1}{4}(2a+3b). \end{aligned}\right.$$

Par là se donnent, avec adjonction des volumes 6), les coordonnées du centre de gravité du pentaèdre $ABDGEF$, ou les valeurs moyennes des côtés x, y, z, savoir

$$8)\quad \begin{cases} M(x) = \dfrac{VX - V'X'}{V - V'} = \dfrac{\frac{1}{4}(3a+b)(b-a)^3 - \frac{1}{16}(6a+b)b-2a)^3}{(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3}, \\ M(y) = \dfrac{VY - V'Y'}{V - V'} = \dfrac{\frac{1}{2}(a+b)(b-a)^3 - \frac{1}{16}(2a+3b)(b-2a)^3}{(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3}, \\ M(z) = \dfrac{VZ - V'Z'}{V - V'} = \dfrac{\frac{1}{4}(a+3b)(b-a)^3 - \frac{1}{8}(2a+3b)(b-2a)^3}{(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3}. \end{cases}$$

Les expressions se simplifient quelque peu lorsqu'on pose

$$1 - \frac{a}{b} = \alpha, \quad 1 - \frac{2a}{b} = \beta;$$

elles s'énoncent alors

$$8')\quad \begin{cases} M(x) = b\dfrac{\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3 - \frac{3}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}, \\ M(y) = b\dfrac{\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3 - \frac{2}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}, \\ M(z) = b\dfrac{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3 - \frac{1}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{2}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}. \end{cases}$$

2. Lorsqu'est $b < 2a$, les plans 1) à 4) [les relations citées sont lues avec le signe inférieur] limitent le tétraèdre $ABCD$; le plan 5) passe au-delà de celui-ci. Les valeurs moyennes de x, y, z tombent d'accord donc avec les valeurs de X, Y, Z dans 7), de manière que

$$9)\quad \begin{cases} M(x) = \dfrac{1}{4}(3a + b), \\ M(y) = \dfrac{1}{2}(a + b), \\ M(z) = \dfrac{1}{4}(a + 3b). \end{cases}$$

Les valeurs moyennes correspondant au cas limite $b = 2a$ s'obtiennent aussi bien par les formules 8) que par les formules 9), savoir

$$10)\quad M(x) = \frac{5}{8}b, \quad M(y) = \frac{6}{8}b, \quad M(z) = \frac{7}{8}b.$$

175. **Théorème VIII.** — V *désigne un domaine (ligne surface, espace) variable soumis à l'arbitraire, enveloppé par un autre domaine* A *invariable;* M (V) *est la valeur moyenne*

de V, p *la probabilité totale pour qu'un point pris arbitrairement dans* A *tombe dans le domaine* V*; la relation suivante est valable :*

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{M(V)}}{\mathrm{A}}.$$

Démonstration. — Les valeurs de V correspondent aux valeurs ou aux combinaisons de valeurs d'une variété continue d'une variable ou de plusieurs variables; cette variété peut s'appeler K. Si dK est l'élément de cette variété contigu à une valeur V saisie à volonté, la probabilité en question, quant à cette valeur particulière V, est exprimée par

$$\frac{dK}{K}\,\frac{V}{A};$$

sa valeur totale est par conséquent

$$p = \frac{1}{A}\,\frac{\int V\,dK}{K},$$

l'intégration étendue au domaine entier de valeurs de K. Mais $\dfrac{\int V\,dK}{K}$ représente la valeur moyenne de V, donc réellement est

1) $$p = \frac{M(V)}{A}.$$

Corollaire. — Par une considération semblable, on se convainc que la probabilité pour que n points pris arbitrairement dans A tombent aussi dans le domaine V est égale à

2) $$p = \frac{M(V^n)}{A^n},$$

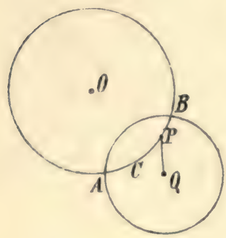
lorsque, par $M(V^n)$, on entend la valeur moyenne de V^n.

176. **Problème XXII**. — *Sur un cercle fixe, donné, un second cercle est jeté arbitrairement. Calculer la longueur moyenne de l'arc (du périmètre du premier) que le second cercle couvre.*

Solution. — Soient O (fig. 91, p. 214) le centre, R le rayon du cercle fixe; Q le centre, r le rayon du cercle mobile; ensuite est $ABC = s$ l'arc qui est couvert par le second cercle. Un tel arc s'obtient

1. avec $r < R$, lorsque Q tombe dans un anneau circulaire, limité par deux cercles décrits de O comme centre avec les rayons $R + r$ et $R - r$; 2. avec $r > R$, quand Q tombe dans un cercle décrit de O comme centre avec le rayon $R + r$ (ici le périmètre entier du cercle fixe est couvert dans un groupe de cas).

Fig. 91.



On se représente, sur le périmètre du cercle fixe, un point P pris arbitrairement; conformément à la proposition du n° 175,

$$1) \qquad p = \frac{M(s)}{2\pi R}$$

est la probabilité totale pour que le point P tombe sur l'arc s.

Mais l'événement actuellement mentionné est identique à un autre consistant en ce qu'après que P a été pris, le centre Q du cercle jeté tombe à une distance de P plus petite que r; avec cette interprétation, s'obtient pour p,

1. avec $r < R$,

l'expression

$$2) \qquad p = \frac{\pi r^2}{\pi\{(R+r)^2 - (R-r)^2\}} = \frac{r}{4R},$$

2. avec $r > R$,

$$2') \qquad p = \frac{\pi r^2}{\pi(R+r)^2} = \left(\frac{r}{R+r}\right)^2.$$

Par l'égalité respective des expressions 1) et 2), 1) et 2'), se donne la valeur moyenne requise

$$3) \qquad M(s) = \frac{\pi r}{2} \qquad \text{pour } r < R,$$

donc indépendante de la grandeur du cercle fixe; et se donne

$$4) \qquad M(s) = 2\pi R\left(\frac{r}{R+r}\right)^2 \qquad \text{pour } r > R.$$

177. **Problème XXIII**. — *Dans une droite limitée, de longueur* a, *deux points sont pris arbitrairement; trouver la valeur moyenne de la* $n^{\text{ième}}$ *puissance de leur distance.*

Solution. — Soient X, Y les deux points; leur distance s'appelle z. On se représente n points ultérieurement pris dans la droite. La probabilité pour qu'ils tombent tous dans l'étendue XY, conformément à l'équation 2) du n° 175, égale

$$1) \qquad p = \frac{M(z^n)}{a^n}.$$

D'un autre côté, p est la probabilité pour que parmi les $(n+2)(n+1)$ arrangements possibles des $(n+2)$ points, un arrangement survienne dans lequel X, Y sont les deux points extrêmes, et comme il y a deux arrangements tels, ainsi est

$$2) \qquad p = \frac{2}{(n+2)(n+1)}.$$

De l'égalité de 1) et de 2), résulte

$$3) \qquad M(z^n) = \frac{2a^n}{(n+2)(n+1)}.$$

Par exemple, se donnent $M(z) = \frac{a}{3}$, s'accordant avec le n° 154, $M(z^2) = \frac{a^2}{6}$, etc..

178. **Problème XXIV**. — *Calculer la valeur moyenne du carré de la distance mesurée dans une direction quelconque d'un point, au-dedans d'une courbe fermée, convexe, à cette courbe.*

Solution. — Si ϱ est la distance mesurée dans la direction d'inclinaison θ avec une droite fixe, on a

$$M = \frac{\int_0^{2\pi} \varrho^2 \, d\theta}{2\pi};$$

comme $\int_0^{2\pi} \varrho^2 \, d\theta = 2J$, lorsque J est l'aire de la courbe, la valeur moyenne requise est

$$M = \frac{J}{\pi},$$

ou est égale au carré du rayon du cercle qui possède la même aire que la courbe, et dans lequel cercle aussi le point de départ des distances se trouve.

Il résulte de là immédiatement que l'aire moyenne des cercles qui sont décrits avec les distances ici considérées comme rayons est égale à l'aire de la courbe donnée.

179. **Problème XXV**. — *Trouver la valeur moyenne du carré des distances de tous les points d'une figure plane délimitée à volonté à un point donné du plan de la figure.*

Solution. — dJ est un élément de la figure donnée, ϱ sa distance à un point donné; ainsi est

$$1) \qquad M = \frac{\int \varrho^2 \, dJ}{J},$$

l'intégration étendue à la figure entière. Si l'on désigne par $\varkappa$ le rayon d'inertie de celle-ci par rapport à un axe normal à son plan, axe passant par le point donné; par $\varkappa_0$ la grandeur analogue rapportée au centre de gravité de la figure; enfin, par $\varDelta$ la distance des deux points mentionnés, l'équation 1) peut s'écrire sous la forme

$$2) \qquad M = \varkappa^2 = \varkappa_0^2 + \varDelta^2.$$

180. **Problème XXVI**. — *Dans chaque partie de deux parties délimitées à volonté d'un plan, un point est pris arbitrairement; calculer le moyen carré de la distance de l'un à l'autre point de la couple de points produite.*

Solution. — Les superficies des deux figures peuvent être désignées par J_1, J_2; leurs rayons d'inertie rapportés à leurs centres de gravité respectifs, par $\varkappa_1$, $\varkappa_2$; la distance des centres de gravité par $\varDelta$. Si l'on fixe l'un des points quelconques, par exemple P dans J_1, et désigne par ϱ sa distance au centre de gravité de la figure J_2, le moyen carré de sa distance à J_2, suivant l'équation 2) du n° 179, est

$$1) \qquad \mu = \varkappa_2^2 + \varrho^2,$$

conséquemment, la valeur moyenne demandée est

$$M = \frac{\int \mu \, dJ_1}{J_1}.$$

l'intégration étendue à J_1. Lorsqu'on introduit, pour μ, la valeur de l'équation 1), devient

$$2)\quad M = \frac{\int x_2^2 \, dJ_1 + \int \varrho^2 \, dJ_1}{J_1} = x_2^2 + \frac{\int \varrho^2 \, dJ_1}{J_1} = x_1^2 + x_2^2 + \Delta^2.$$

181. **Problème XXVII**. — *Trouver le moyen carré de la distance de deux points qui sont pris arbitrairement dans une figure plane, délimitée à volonté.*

Solution. — La question découle de la précédente lorsqu'on y suppose les deux figures J_1, J_2, congruentes et qu'on les fait coïncider. Alors $x_1 = x_2 = x$ et $\Delta = 0$; par conséquent, conformément à l'équation 2),

$$M = 2x^2.$$

Ainsi, par exemple, le moyen carré de la distance de deux points dans la surface d'un cercle de rayon r est égal à

$$M = r^2.$$

182. **Problème XXVIII**. — *Trouver la surface moyenne d'un triangle sphérique.*

Solution. — On fixe un sommet du triangle ABC, par exemple A, et l'angle α en ce sommet; à chaque triangle ABC, correspond un triangle $A'BC$, et la somme des deux triangles est le fuseau $ABA'CA$. Mais comme la valeur moyenne de ABC, manifestement, est la même que celle de $A'BC$, chacune s'élève à la moitié du fuseau. De cette considération, résulte la valeur moyenne requise

$$M = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2} ABA'CA \, . \, d\alpha}{\pi} = \frac{\int_0^\pi r^2 \, \alpha \, d\alpha}{\pi} = \frac{1}{2} \pi r^2,$$

c'est-à-dire qu'elle est égale à la huitième partie de la surface sphérique ou à la surface du triangle trois fois rectangle.

Corollaire. — Combien grande est la probabilité pour que quatre points pris arbitrairement sur une surface sphérique se trouvent sur la même demi-sphère?

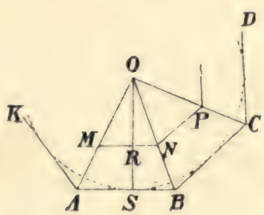
On relie trois des points, par exemple A, B, C, par un triangle; avec ces trois premiers points, le quatrième D gît sur la même demi-sphère lorsqu'il ne tombe pas dans le triangle opposé à ABC. Comme la valeur moyenne de ce triangle s'élève à $\frac{1}{8}\,O$, lorsque O est la surface de la sphère, on a, conformément à la proposition du n° 175,

$$p = 1 - \frac{\frac{1}{8}\,O}{O} = \frac{7}{8}.$$

183. **Problème XXIX.** — *Trouver la surface moyenne des cercles tangents intérieurement au périmètre d'un polygone donné circonscrit à un cercle.*

Solution. — Les côtés AB, BC, CD,... du polygone (fig. 92) sont désignés par a, b, c...; le rayon du cercle inscrit est désigné par r; son centre se trouve en O. On joint les extrémités d'un côté, par exemple AB, à O; on mène MN, à la distance $RS = x$, parallèlement à AB; la somme des surfaces de tous les cercles de rayon x, qui sont tangents au côté AB, est exprimée par

Fig. 92.



$$\pi x^2 . MN . dx;$$

ce qui, parce que $MN = \frac{r - x}{r}\,a$, équivaut à

$$\frac{\pi a}{r}\,x^2\,(r - x)\,dx;$$

par là, la somme des surfaces de tous les cercles tangents intérieurement au côté AB s'obtient égale à

$$\frac{\pi a}{r}\int_0^r x^2\,(r - x)\,dx = \frac{1}{12}\,\pi\,a\,r^3;$$

par rapport au périmètre entier du polygone, cela donne

$$\frac{1}{12}\,\pi r^3\,(a + b + c + \ldots),$$

et comme la quantité de tous les cercles est exprimée par la surface du polygone, c'est-à-dire par $\frac{1}{2}\,r\,(a + b + c + \ldots)$, la valeur moyenne cherchée est

$$M = \frac{1}{6} \pi r^2,$$

ou est égale à la sixième partie de la surface du cercle inscrit au polygone.

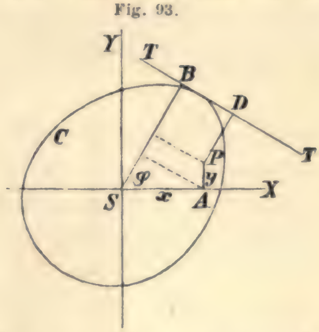
184. **Problème XXX.** — *Trouver la surface moyenne des cercles qui peuvent être dessinés dans un polygone donné, circonscrit à un cercle.*

Solution. — Les centres de tous les cercles de rayon x dessinés dans le polygone $ABC\ldots$ (fig. 92) tombent dans un polygone $MNP\ldots$ dont les côtés sont parallèles aux côtés du polygone donné, à la distance $RS = x$; comme ce polygone est semblable au polygone donné, son aire est $\frac{r}{2}(a+b+c+\ldots)\left(\frac{r-x}{r}\right)^2$ et la valeur moyenne requise

$$M = \frac{\frac{\pi}{2r}(a+b+c+\ldots).\int_0^r x^2 (r-x)^2\, dx}{\frac{1}{2r}(a+b+c+\ldots)\int_0^r (r-x)^2\, dx} = \frac{1}{10}\pi r^2.$$

185. **Problème XXXI.** — *Trouver l'aire moyenne de la podaire d'une courbe donnée, convexe, fermée, par rapport à un point quelconque de sa surface, comme pôle.*

Fig. 93.



Solution. — Dans la fig. 93, soit C la courbe donnée, S le centre de gravité, Ω la superficie de la surface limitée par la courbe, P le point pris arbitrairement; x, y sont les coordonnées de ce point par rapport à des axes rectangulaires passant par S comme origine; V désigne la superficie de la podaire de C par rapport à P.

La valeur moyenne cherchée est

$$1) \qquad M = \frac{1}{\Omega}\int\int V\, dx\, dy.$$

Si l'on considère une tangente quelconque de C, par exemple TT', et mène à celle-ci de P et de S les perpendiculaires $PD = \varrho$ et $SB = r$, ces dernières apparaissent comme des rayons vecteurs des podaires de C rapport par à P et à S. En posant l'angle $XSB = \varphi$, on a

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho^2\, d\varphi,$$

ou, à cause de $\varrho = r - x\cos\varphi - y\sin\varphi$, aussi

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 d\varphi - \int_0^{2\pi} r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi + \frac{1}{2}\pi(x^2 + y^2) - \int_0^{2\pi} r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Le premier terme du second membre de l'égalité exprime l'aire de la podaire de C relative au centre de gravité S comme pôle; si l'on désigne ce terme par J et introduit la valeur de V dans l'équation 1), s'obtient

$$2) \quad M = J + \frac{\pi}{2\Omega}\int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy - \frac{1}{\Omega}\int\int\int_0^{2\pi} r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\, dx\, dy\, d\varphi.$$

Mais la double intégrale du second membre représente le moment d'inertie de la surface de C par rapport à un axe passant par S, dirigé normalement au plan de C; si le rayon d'inertie correspondant est désigné par $\varkappa$, est

$$3) \quad \int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \Omega\varkappa^2;$$

l'intégrale du troisième terme disparaît, parce qu'avec les axes choisis est

$$4) \quad \int\int x\, dx\, dy = \int\int y\, dx\, dy = 0.$$

Si l'on introduit les valeurs de 3) et de 4) dans 2), finalement devient

5) $$M = J + \frac{1}{2}\pi\varkappa^2,$$

c'est-à-dire que la valeur moyenne des surfaces de toutes les podaires égale la surface de la podaire rapportable au centre de gravité, augmentée de la demi-surface d'un cercle ayant pour rayon le rayon d'inertie correspondant au centre de gravité.

Si la courbe donnée est une circonférence de cercle de rayon r, est

$$J = \pi r^2, \quad \varkappa^2 = \frac{1}{2} r^2,$$

par conséquent $M = \frac{5}{4}\pi r^2$.

Pour une ellipse dont les demi-axes sont a, b, on trouve, après un calcul simple,

$$J = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2), \quad \varkappa^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

et par là $M = \frac{5}{8}\pi(a^2 + b^2)$.

186. **Problème XXXII.** — *Calculer l'aire moyenne de tous les triangles de périmètre donné et de base donnée.*

Solution. — La base est désignée par a, la somme des deux autres côtés par b, un de ces côtés par x; la surface du triangle est égale à

$$\left\{\frac{a+b}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\left(\frac{a+b}{2}-b+x\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\left\{a^2-(b-2x)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

et sa valeur moyenne, puisque x est lié aux conditions

$$a + x > b - x, \quad a + b - x > x,$$

est

$$M = \frac{\frac{1}{4}(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{b+a}{2}}\left\{a^2-(b-2x)^2\right\}^{\frac{1}{2}}dx}{a} = \frac{1}{16}\pi a\sqrt{b^2 - a^2}.$$

187. **Problème XXXIII.** — *Trouver la superficie moyenne de tous les triangles de périmètre donné.*

Solution. — Lorsqu'on désigne le périmètre donné par $2s$, deux des côtés par x, y, la surface du triangle est exprimée par

$$\{s(s-x)(s-y)(x+y-s)\}^{\frac{1}{2}};$$

comme maintenant x, y, sous la supposition $x > y$, sont liés aux conditions

$$x + y > s, \quad x < s$$

la valeur moyenne requise est

$$M = \frac{\int\limits_0^s \int\limits_{s-y}^s \{s(s-x)(s-y)(x+y-s)\}^{\frac{1}{2}} dy\, dx}{\int\limits_0^s \int\limits_{s-y}^s dy\, dx}$$

$$= \frac{2}{s^2}\int\limits_0^s \{s(s-y)\}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{s-y}^s \sqrt{s(y-s)+(2s-y)x-x^2}\, dx$$

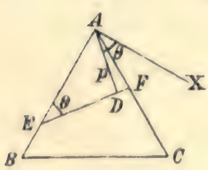
$$= \frac{2}{s^2}\int\limits_0^s \{s(s-y)\}^{\frac{1}{2}} \frac{y^2}{8}\, dy \int\limits_{s-y}^s \frac{dx}{\sqrt{s(y-s)+(2s-y)x-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{4s^2}\int\limits_0^s y^2\{s(s-y)\}^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\pi}{2s^5}\int\limits_0^s (s^2-z^2)^2 z^2\, dz = \frac{\pi}{105}(2s)^2.$$

Ce sont les $\frac{36}{35}$ de la surface du cercle qui est inscrit dans le triangle équilatéral se trouvant parmi les triangles.

188. **Problème XXXIV.** — *Trouver la surface moyenne du triangle qui est découpé d'un triangle donné, équilatéral par une droite menée arbitrairement.*

Fig. 94.



Solution. — ABC (fig. 94) est le triangle donné, s la longueur d'un côté de celui-ci, EF la droite menée arbitrairement avec les coordonnées p, θ rapportées à A et à un axe AX perpendiculaire à AB, V la surface du triangle AEF; on a

$$1) \qquad M = \frac{\iint V\, dp\, d\theta}{\iint dp\, d\theta}.$$

Si l'on pose $AE = x$, est

$$V = \frac{x^2 \sin \frac{1}{3}\pi \sin\theta}{2 \sin(\frac{1}{3}\pi + \theta)} = \frac{x^2\sqrt{3}\sin\theta}{4\sin(\frac{1}{3}\pi+\theta)},$$

$$p = x\sin\theta, \qquad dp = dx\sin\theta;$$

on introduit ces valeurs dans l'équation 1) et on limite, en considération de la symétrie de la figure, l'intégration par rapport à θ, à l'intervalle 0 à $\frac{1}{3}\pi$; ainsi s'obtient

$$M = \frac{\int_0^s\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{x^2\sqrt{3}\sin^2\theta}{4\sin(\frac{1}{3}\pi+\theta)}\,dx\,d\theta}{\int_0^s\int_0^{\frac{1}{3}\pi} dx\sin\theta\,d\theta} = \frac{s^2\sqrt{3}}{6}\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\frac{\sin^2\theta}{\sin(\frac{1}{3}\pi+\theta)}\,d\theta.$$

Quant à l'intégrale restante, la substitution $\frac{1}{3}\pi + \theta = \vartheta$ conduit au but; on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\frac{\sin^2\theta}{\sin(\frac{1}{3}\pi+\theta)}\,d\theta = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\frac{\sin^2(\vartheta-\frac{1}{3}\pi)}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\left\{\frac{1}{4}\sin\vartheta - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\vartheta + \frac{3}{4}\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}d\vartheta$$

$$= \left\{-\frac{1}{4}\cos\vartheta - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\vartheta + \frac{3}{4}l\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta\right\}_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{4}(3l.3-2).$$

Donc finalement est

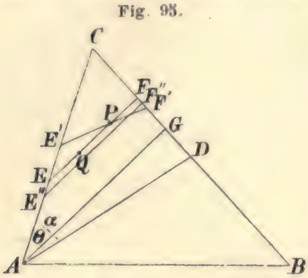
$$M = \frac{s^2\sqrt{3}}{24}(3l.3-2). \tag{2}$$

189. **Problème XXXV**. — *Dans la surface d'un triangle donné, deux points sont pris à volonté et reliés par une droite. Trouver la surface moyenne de la plus grande des deux parties en lesquelles le triangle est divisé par cette droite.*

Solution. — Soit ABC (fig. 95, p. 224) le triangle; soient a, b, c ses côtés, D le milieu de BC, l'angle $CAD = \alpha$; P, Q peuvent être les points pris à volonté et EF leur ligne de jonction. Nous posons

$\angle CEF = \theta, \quad CE = x, \quad EP = y, \quad PQ = z, \quad EF = y'$; nous considérons d'abord P comme fixe et renfermons Q dans l'élément $z\,d\theta\,dz$ entre les droites EPF et $E'PF'$, dont l'inclinaison mutuelle l'une sur l'autre est $d\theta$. Si l'on appelle w la surface de la plus grande partie de ABC,

Fig. 95.



$$1) \qquad d\theta \int_0^y w z\,dz$$

est la somme des w pour toutes les positions de Q dans EPE'. A une variation de x de dx et de y de dy, correspond un élément de l'aire du triangle en P de la grandeur $\sin\theta\,dx\,dy$; conséquemment, on obtient pour la somme des w, pour toutes les positions de P dans l'élément $EE''F''F$, l'expression

$$2) \qquad \sin\theta\,d\theta\,dx \int_0^{y'}\int_0^{y} w\,dy\,z\,dz,$$

laquelle expression est à doubler, puisque P et Q peuvent être permutés.

Si maintenant on pose

$$\Delta\,ABC = 1, \quad \Delta\,CEF = v$$

est 1) $w = 1 - v$, lorsque θ demeure entre les limites 0 et α et x entre 0 et b. En échange, si θ se trouve entre les limites α et A, est 2) $w = 1 - v$, aussi longtemps que x se trouve entre 0 et la valeur x' pour laquelle v devient $\frac{1}{2}$; en compensation est 3) $w = v$ lorsque x varie entre x' et b. L'expression complète de la somme des w, sur le domaine assigné des valeurs de x et de θ, est donc

$$3) \left\{ \begin{aligned} & 2\int_0^{\alpha}\int_0^{b}\int_0^{y'}\int_0^{y}(1 - v)\sin\theta\,d\theta\,dx\,dy\,z\,dz \\ & + 2\int_{\alpha}^{A}\sin\theta\,d\theta\int_0^{y'}\int_0^{y}dy\,z\,dz\left\{\int_0^{x'}(1 - v)\,dx + \int_{x'}^{b} v\,dx\right\} \\ = & \frac{1}{3}\int_0^{\alpha}\int_0^{b}(1-v)\sin\theta\,d\theta\,y'^3\,dx + \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{A}\left\{\int_0^{x'}(1-v)y'^3\,dx + \int_{x'}^{b} v\,y'^3\,dx\right\}\sin\theta\,d\theta. \end{aligned} \right.$$

Maintenant est

$$v = \frac{x^2 \sin C \sin \theta}{2 \sin (C + \theta)},$$

$$\Delta\, CAG = u = \frac{b^2 \sin C \sin \theta}{2 \sin (C + \theta)},\ AG \parallel EF,$$

$$\partial v = \frac{x \sin C \sin \theta\, dx}{\sin (C + \theta)},$$

$$du = \frac{b^2 \sin^2 C\, d\theta}{2 \sin^2 (C + \theta)},$$

$$y' = \frac{x \sin C}{\sin (C + \theta)};$$

par là s'obtient

$$\text{4)} \qquad \sin \theta\, d\theta\, y'^3\, dx = 2 \frac{v}{u}\, du\, dv.$$

Par introduction de la valeur de 4) dans l'expression 3), les variables θ, x, auxquelles l'intégration est encore à étendre, sont remplacées par de nouvelles variables u, v. Et comme aux valeurs 0, α, A de θ, correspondent les valeurs 0, $\frac{1}{2}$, 1 de u, puis aux valeurs 0, x', b de x, les valeurs 0, $\frac{1}{2}$, u de v, l'expression 3) se transforme en la suivante :

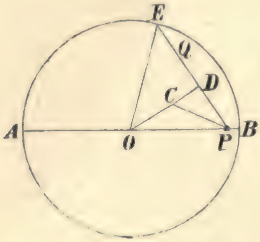
$$\text{5)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{u} (1-v) u^{-1}\, du\, v\, dv + \frac{2}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} (1-v) v\, dv + \int_{\frac{1}{2}}^{u} v^2\, dv \right\} u^{-1}\, du \\ & - \frac{1}{9} \int_0^{\frac{1}{2}} (3 - 2u)\, u\, du + \frac{1}{36} \int_{\frac{1}{2}}^{1} (u^{-1} + 8u^2)\, du = \frac{7}{72} + \frac{1}{36}\, l \cdot 2. \end{aligned} \right.$$

Cinq expressions semblables, indépendantes des angles et des côtés du triangle, s'obtiennent encore, parce que, pour épuiser tous les cas, chaque côté est à combiner avec les deux angles adjacents à ce côté, de la manière produite. Donc, la valeur moyenne exigée, lorsque — comme cela a été supposé — la surface du triangle $A\,B\,C$ est prise pour unité (de sorte qu'aussi la quantité des couples de points P, Q est exprimée par 1), est

$$\text{6)} \qquad M = \frac{7}{12} + \frac{1}{6}\, l. 2.$$

190. **Problème XXXVI**. — *Dans la surface d'un cercle donné, deux points sont pris arbitrairement et par ceux-ci sont menés des cercles qui sont tangents à la circonférence du cercle donné; calculer la surface moyenne de tous ces cercles.*

Fig. 96.



Solution. — Dans la fig. 96, O est le centre du cercle donné de rayon a; P, Q, une couple de points pris à volonté. Pour fixer ces points, on joint P à O et à Q, et on pose

$$OP = ax,\ PQ = ay,\ \angle\, OPQ = \varphi.$$

C est le centre d'un cercle qui passe par P et par Q et est tangent à la circonférence du cercle donné, r son rayon; ainsi est

$$\begin{aligned}\overline{OC}^2 = (a-r)^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{PC}^2 - 2\, OP\,.\,PC \cos OPC \\ &= a^2x^2 + r^2 - 2\,ar\,x\cos(\varphi - CPD);\end{aligned}$$

si l'on décompose $\cos(\varphi - CPD)$ et observe que $r \cos CPD = \frac{1}{2}\, ay$, par conséquent que $\sin CDP = \frac{1}{r}\left(r^2 - \frac{1}{4}a^2y^2\right)^{\frac{1}{2}}$, s'obtient, pour la détermination de r, l'équation

$$(a-r)^2 = a^2x^2 + r^2 - a^2xy\cos\varphi - 2\,ax\sin\varphi\left(r^2 - \frac{1}{4}a^2y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

laquelle, ordonnée par rapport à r et avec utilisation des abréviations

1) $$X^2 = 1 - x^2\sin^2\varphi,\quad m^2 = 1 - x^2,$$

s'énonce

2) $$4X^2r^2 - 4a(m^2 + xy\cos\varphi)r + a^2(m^4 + 2m^2xy\cos\varphi + x^2y^2) = 0.$$

Les racines r_1, r_2 de cette équation sont les rayons des deux cercles qui passent par P et par Q et sont tangents à la circonférence donnée; la somme des surfaces de ces deux cercles est

3) $$\left\{\begin{aligned}\pi(r_1^2 + r_2^2) &= \pi\left[(r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2\right] \\ &= \pi\left[\frac{a^2(m^2 + xy\cos\varphi)^2}{X^4} - \frac{a^2(m^4 + 2m^2xy\cos\varphi + x^2y^2)}{2X^2}\right] = \pi\Gamma.\end{aligned}\right.$$

Premièrement, si le point P est fixé, l'élément de la surface de cercle en Q est exprimé par $ay\, d\varphi\, d(ay) = a^2\, y\, dy\, d\varphi$;

si l'on accorde ensuite au point P toutes les positions dans l'intérieur de l'élément de surface correspondant, consistant en un anneau circulaire avec les rayons $a x$ et $a x + d(a x)$, et par conséquent égal à $2\pi\, a^2 x\, dx$, on obtient, pour la valeur moyenne des surfaces des cercles décrits, puisque leur quantité est $2\pi^2 a^4$,

$$4)\quad M = \frac{1}{2\pi^2 a^4}\int\int\int \pi(r_1^2 + r_2^2)a^2 y\, dy\, d\varphi . 2\pi a^2 x\, dx = \int\int\int V x\, dx\, y\, dy\, d\varphi .$$

Il s'agit maintenant de trouver les limites d'intégration.

1. Les limites de y sont 0 et $\frac{PE}{a}$; pour la dernière limite, s'obtient, par l'équation ($r. \Delta OPE$)

$$a^2 = a^2 x^2 + PE^2 - 2ax . PE . \cos\varphi ,$$

la valeur

$$\frac{PE}{a} = x\cos\varphi + \sqrt{x^2\cos^2\varphi + 1 - x^2} = x\cos\varphi + \sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi} = X + x\cos\varphi .$$

Lorsqu'on ajoute au résultat de cette intégration, le résultat de la substitution de $\pi - \varphi$ à φ, on n'a besoin d'étendre

2. l'intégration par rapport à φ qu'à l'intervalle 0 à $\frac{\pi}{2}$, pour épuiser tous les cas où Q se trouve AU-DESSUS de AB. L'introduction des cas où Q se trouve AU-DESSOUS de AB a lieu simplement par doublement.

3. Les limites de OP enfin sont 0 et a, par conséquent les limites de x, 0 et 1.

Conformément à ce qui précède, est

$$5)\quad M = 2\int_0^1 x\, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ \int_0^{X + x\cos\varphi} V y\, dy + S(\pi - \varphi) \right\} .$$

D'abord, on a

$$\int_0^{X + x\cos\varphi} V y\, dy = \frac{a^2}{X^4}\left\{ \frac{m^4}{2}(X + x\cos\varphi)^2 + \frac{2m^2 x\cos\varphi}{3}(X + x\cos\varphi)^3 + \frac{x^2\cos^2\varphi}{4}(X + x\cos\varphi)^4 \right\}$$

$$- \frac{a^2}{2X^2}\left\{ \frac{m^4}{2}(X + x\cos\varphi)^2 + \frac{2m^2 x\cos\varphi}{3}(X + x\cos\varphi)^3 + \frac{x^2}{4}(X + x\cos\varphi)^4 \right\};$$

par cela s'obtient, lorsqu'on substitue simultanément à $x^2\cos^2\varphi$ la valeur $X^2 - m^2$ résultante de l'équation 1),

$$\int_0^{X + x\cos\varphi} Vy\,dy + S(\pi - \varphi)$$

$$= \frac{a^2}{X^4}\left\{ m^4(2X^2 - m^2) + \frac{4m^2}{3}(4X^2 - m^2)(X^2 - m^2) + \frac{1}{2}(8X^4 - 8X^2m^2 + m^4)(X^2 - m^2)\right\}$$

$$- \frac{a^2}{2X^2}\left\{ m^4(2X^2 - m^2) + \frac{4m^2}{3}(4X^2 - m^2)(X^2 - m^2) + \frac{1}{2}(8X^4 - 8X^2m^2 + m^4)(X^2 - m^2)\right\}$$

$$= a^2\left[\frac{2}{3}(3 - m^2)X^2 - \frac{1}{3}(2 - m^2)m^2 - \frac{(5 - m^2)m^4}{12X^2} - \frac{m^6}{6X^4}\right].$$

Par introduction de cette expression dans l'équation 5), devient

$$6)\quad M = 2a^2\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{3}(3 - m^2)X^2 - \frac{1}{3}(2 - m^2)m^2 - \frac{(5 - m^2)m^4}{12X^2} - \frac{m^6}{6X^4}\right]d\varphi.$$

Dans quoi est

$$7)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} X^2\,d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 = \frac{\pi}{4}(1 + m^2);$$

ensuite, avec $x\cos y = u$, on a

$$8)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{X^2} = \int_0^x \frac{du}{(1 - u^2)\sqrt{x^2 - u^2}} = \frac{\pi}{2m};$$

avec la même substitution, s'obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{X^4} = \int_0^x \frac{du}{(1 - u^2)^2\sqrt{x^2 - u^2}},$$

et lorsqu'on pose ensuite $\dfrac{u}{\sqrt{x^2 - u^2}} = v$, il vient

$$9)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{X^4} = \int_0^\infty \frac{(1 + v^2)\,dv}{(1 + m^2v^2)^2} = \int_0^\infty \frac{dv}{(1 + m^2v^2)^2} + \int_0^\infty \frac{v^2\,dv}{(1 + m^2v^2)^2} = \frac{\pi}{4m} + \frac{\pi}{4m^3}.$$

Après introduction des valeurs de 7), de 8), de 9) dans l'équation 6), on obtient enfin

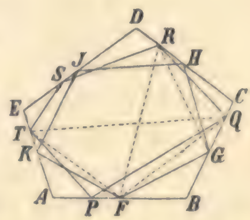
10) $$M=\pi a^2\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}m^3\right)x\,dx=\frac{1}{2}\pi a^2\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{z^3}\right)dz=\frac{2}{5}\pi a^2,$$

c'est-à-dire deux cinquièmes de la surface du cercle donné.

191. **Problème XXXVII.** — *Dans un polygone donné, un second polygone de même nombre de côtés est inscrit de manière que les sommets du dernier sont pris arbitrairement, séparément sur les côtés du premier; calculer la surface moyenne du polygone inscrit.*

Solution. — Soit $ABCDE$ (fig. 97) le polygone donné, $PQRST$ le polygone inscrit. On regarde seulement le point P comme pris à volonté, les quatre autres comme fixés. Ainsi, du polygone $PQRST$, il n'y a que le triangle TQP variable, et comme celui-ci atteint sa surface moyenne, lorsque P tombe au point milieu F (centre de gravité, v. n° 149, théorème I) de AB, $FQRST$ représente la surface moyenne de $PQRST$, TANT QUE P SEUL EST PRIS A VOLONTÉ.

Fig. 97.



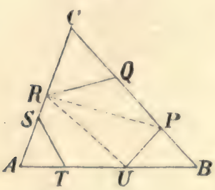
Si l'on considère dans $FQRST$, Q seulement comme arbitraire, la triangle FRQ est seul variable et atteint sa surface moyenne lorsque Q tombe au point milieu G de BC; par conséquent, $FGRST$ est la surface moyenne de $PQRST$, LORSQUE P ET Q SEULS SONT PRIS A VOLONTÉ, et ainsi de suite.

Par continuation de ce raisonnement, on parvient au résultat suivant: la surface moyenne du polygone $PQRST$, lorsque tous les sommets de celui-ci sont pris arbitrairement dans les côtés correspondants, est égale à la superficie du polygone $FGHJK$, dont les sommets se trouvent aux points milieux de AB, de BC....

D'après cela, pour le triangle, est $M=\frac{1}{4}J$; pour tout quadrilatère, $M=\frac{1}{2}J$; pour un polygone régulier de n côtés, $M=\cos^2\frac{\pi}{n}J$; lorsque J désigne, dans tous les cas cités, la surface du polygone donné.

192. **Problème XXXVIII.** — *Trouver la surface moyenne d'un hexagone, dont les sommets sont pris arbitrairement deux sur chaque côté sur les côtés d'un triangle donné.*

Fig. 98.



Solution. — Les points P, Q (fig. 98) seuls sont regardés comme pris à volonté, les quatre autres sont fixés; le quadrilatère $RUPQ$ seul est variable et sa surface atteint sa valeur moyenne lorsque les points P, Q divisent le côté BC en trois parties égales : car, pour toute position de Q, le triangle RUP prend sa surface moyenne lorsque P tombe au milieu de BQ, et pour toute position de P, le triangle RPQ atteint sa surface moyenne lorsque Q tombe au milieu de PC; donc la valeur moyenne des deux triangles ensemble, ou du quadrilatère formé par eux survient lorsque P, Q divisent le côté BC en trois parties égales.

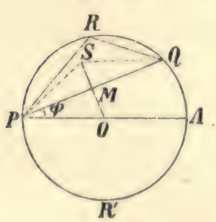
Par continuation de cette considération, on est conduit au résultat : la surface moyenne de $PQRSTU$ est présentée par l'hexagone dont les sommets divisent chacun des côtés du triangle donné en trois parties égales. Par conséquent est

$$M = \frac{2}{3} \Delta ABC.$$

193. **Problème XXXIX.** — *Sur la circonférence d'un cercle donné, trois points sont pris arbitrairement; trouver la surface moyenne du triangle qui joint ces points.*

Solution. — L'un des trois points P, Q, R, par exemple P,

Fig. 99.



(fig. 99) peut demeurer fixé; nous considérons le second point Q provisoirement aussi comme invariable et posons $OA = r$, l'angle $APQ = \varphi$. La surface moyenne de tous les triangles PQR dont le troisième sommet R est pris sur l'arc PQR est égale à la surface du triangle PQS dont le sommet S coïncide avec le centre de gravité de l'arc PRQ, et la somme de ces triangles est

$$\Sigma_1 = \Delta\, PQS \,.\, arc\, PRQ = PM \,.\, MS \,.\, arc\, PRQ,$$

ou, comme

$$OS = \frac{r \,.\, PQ}{arc\, PRQ}$$

et

$$MS = OS - r \sin \varphi,$$

1) $$\Sigma_1 = r^3 \cos \varphi\, (2 \cos \varphi - (\pi - 2\varphi) \sin \varphi).$$

La somme des triangles PQR dont le troisième sommet R tombe sur l'arc $PR'Q$ s'obtient par suite en remplaçant φ par $-\varphi$, et s'énonce par conséquent

2) $$\Sigma_2 = r^3 \cos \varphi\, (2 \cos \varphi + (\pi - 2\varphi) \sin \varphi),$$

de manière que la somme de tous les triangles PQR, avec Q demeurant fixe, égale

3) $$\Sigma = 4 r^3 \cos \varphi\, (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi).$$

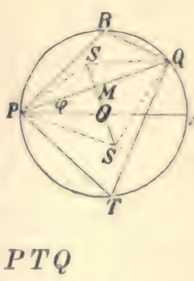
Par cela, on obtient la valeur moyenne exigée

4) $$M = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Sigma\, r\, d(2\varphi)}{4\pi^2 r^2} = \frac{2 r^2}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi\, (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{3}{2\pi} r^2.$$

194. **Problème XL.** — *Sur la circonférence d'un cercle donné, quatre points sont pris arbitrairement et reliés en un quadrilatère convexe; trouver la surface moyenne de ce quadrilatère.*

Solution. — Par des considérations analogues à celles employées dans la solution de la question précédente, on trouve, pour la somme des quadrilatères $PRQT$, en fixant Q (fig. 100), l'expression

Fig. 100.



$$\Sigma = PSQS' \,.\, arc\, PRQ \,.\, arc\, PTQ,$$

dans laquelle S, S' sont les centres de gravité des arcs PRQ, PTQ.

Par calcul plus étendu, se donne

$$\Sigma = PM \,.\, SS' \,.\, arc\, PRQ \,.\, arc\, PTQ$$

$$= r \cos \varphi \left(\frac{r \,.\, PQ}{arc\, PRQ} + \frac{r \,.\, PQ}{arc\, PTQ} \right) arc\, PRQ \,.\, arc\, PTQ = 4 \pi r^4 \cos^2 \varphi,$$

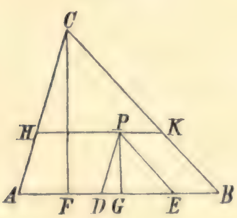
et par là la valeur moyenne requise, en tenant compte de la circonstance que les points R, Q, T peuvent être permutés de six manières,

$$M = \frac{6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Sigma r d(2\varphi)}{8\pi^3 r^3} = \frac{6r^2}{\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{3}{\pi} r^2;$$

elle est deux fois aussi grande que la valeur moyenne du triangle du n° 193.

195. **Problème XLI.** — *D'un point pris arbitrairement dans la surface d'un triangle donné, des parallèles sont menées à deux des côtés jusqu'au troisième. Trouver la surface moyenne du triangle ainsi formé.*

Fig. 101.



Solution. — ABC (fig. 101) est le triangle donné, P le point pris arbitrairement, $CF = h$, $PG = y$; on a

$$\Delta DEP = \frac{y^2}{h^2} \Delta ABC;$$

mais, comme la valeur moyenne de y^2 égale

$$\frac{\int_0^h y^2\, HK\, dy}{\frac{ch}{2}} = \frac{\int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} c\, dy}{\frac{ch}{2}} = \frac{h^2}{6},$$

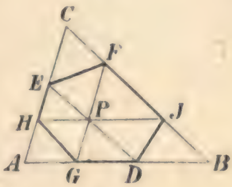
la valeur moyenne du triangle DEP égale

$$M = \frac{1}{6} \Delta ABC.$$

196. **Problème XLII.** — *Par un point pris à volonté dans la surface d'un triangle donné, des parallèles sont menées aux côtés du triangle et leurs extrémités, quant aux côtés, sont reliées en un hexagone; déterminer la surface moyenne de l'hexagone.*

Solution. — Un regard jeté sur la figure 102 apprend que la double surface de l'hexagone $GDJFEH$ est égale au triangle donné ABC, augmenté de la somme des triangles GDP, JFP, EHP; comme la surface moyenne de chacun de ces triangles vaut le $\frac{1}{6}$ du triangle donné (v. nº 195), est

Fig. 102.



$$2\,M = \Delta ABC + 3 \cdot \frac{1}{6} \Delta ABC;$$

d'où résulte

$$M = \frac{3}{4} \Delta ABC.$$

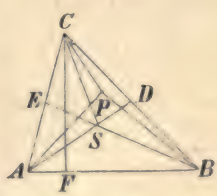
197. **Théorème IX.** — *L'aire moyenne d'un triangle, formé en unissant un point quelconque d'une figure plane délimitée à volonté avec deux points fixes d'une droite qui se trouve dans le plan de la figure sans couper le périmètre de celle-ci, est égale à l'aire du triangle formé en unissant le centre de gravité de la figure avec les points fixes.*

Démonstration. — Cette proposition est une conséquence du théorème du nº 168.

198. **Problème XLIII.** — *Dans la surface d'un triangle, un point est pris arbitrairement et est joint aux trois sommets; trouver l'aire moyenne respectivement de la plus grande, de l'intermédiaire et de la plus petite des trois parties en lesquelles le triangle est décomposé.*

1º **Solution.** — ABC (fig. 103) est le triangle donné, S son centre de gravité, P le point pris arbitrairement; le triangle ABP, se trouvant au-dessus de AB, sera le plus grand lorsque P tombe dans le quadrilatère $ESDC$; il atteint par conséquent sa surface moyenne lorsque P coïncide avec le centre de gravité du quadrilatère $ESDC$ ou avec les centres de gravité d'un des triangles ESC, DSC (v. le nº 197), parce que les trois centres de gravité spécifiés se trouvent sur une parallèle à AB. Donc est

Fig. 103.



$$M_g = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{3} \left(CF + \frac{1}{2} CF + \frac{1}{3} CF \right) = \frac{11}{18} \Delta ABC.$$

Par des considérations semblables, on reconnaît que la valeur moyenne respective du triangle reposant sur AB, de grandeur intermédiaire, de grandeur la plus petite, se présente lorsque le point P coïncide respectivement avec le centre de gravité d'un des triangles ASE, BSD, avec le centre de gravité du triangle ABS.

Par conséquent est

$$M_i = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} CF + \frac{1}{3} CF\right) = \frac{5}{18} \varDelta ABC,$$

$$M_p = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} CF\right) = \frac{2}{18} \varDelta ABC.$$

2ᵉ **Solution.** — On désigne les distances du point P aux côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, suivant l'ordre, par x, y, z, les hauteurs des triangles correspondant à ces côtés par h_1, h_2, h_3, la surface de ABC par $\varDelta$; ainsi sont valables les relations

$$ax + by + cz = 2\varDelta,$$

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2\varDelta,$$

desquelles résulte la nouvelle relation

$$\frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} = 1.$$

Si l'on désigne les trois quotients du premier membre de cette égalité par ξ, η, ζ, la question se présente sous la forme : trouver la valeur moyenne de la plus grande, de l'intermédiaire et de la plus petite partie de l'unité divisée arbitrairement en trois parties. Si ξ est la plus grande, ζ la plus petite partie, en vertu du nº 169, est

$$M(\xi) = M\left(\frac{x}{h_1}\right) = \frac{11}{18}, \quad M(\eta) = M\left(\frac{y}{h_2}\right) = \frac{5}{18}, \quad M(\zeta) = M\left(\frac{z}{h_3}\right) = \frac{2}{18},$$

donc, comme plus haut, on a

$$M\left(\frac{a}{2}x\right) = \frac{11}{18}\frac{a}{2}h_1 = \frac{11}{18}\varDelta, \quad M\left(\frac{b}{2}y\right) = \frac{5}{18}\frac{b}{2}h_2 = \frac{5}{18}\varDelta,$$

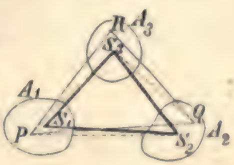
$$M\left(\frac{c}{2}z\right) = \frac{2}{18}\frac{c}{2}h_3 = \frac{2}{18}\varDelta.$$

199. **Théorème X.** — *Dans chaque figure de trois figures se trouvant dans le même plan, délimitées à volonté, dont les périmètres ne peuvent pas être coupés en même temps par une droite, un point est pris arbitrairement; l'aire moyenne du*

triangle déterminé par les trois points produits est égale à l'aire du triangle formé en unissant les centres de gravité des figures.

Démonstration. — A_1, A_2, A_3 (fig. 104) sont les trois figures, S_1, S_2, S_3 leurs centres de gravité, P, Q, R les trois points quelconques. R seul est envisagé comme variable, pendant que P et Q sont regardés comme fixes; ainsi, la valeur moyenne des triangles PQR est le triangle PQS_3 (v. n° 197).

Fig. 104.



La valeur moyenne des triangles PQS_3, lorsque Q seul est envisagé comme variable, est le triangle $PS_3\,S_2$.

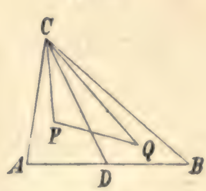
La valeur moyenne des triangles $PS_3\,S_2$ lorsque P prend toutes les positions dans A_1, c'est-à-dire la valeur moyenne des triangles PQR, lorsque tous les points sont envisagés comme arbitraires, est donc de fait le triangle $S_1\,S_2\,S_3$.

Corollaire. — La proposition ci-dessus peut être étendue à plusieurs points et à plusieurs figures lorsque celles-ci sont disposées de telle manière que les périmètres de trois quelconques d'entre elles ne peuvent être coupés en même temps par une droite.

200. **Problème XLIV**. — *Dans la surface d'un triangle donné, deux points sont pris arbitrairement et avec un sommet sont unis en un triangle; trouver l'aire moyenne de celui-ci.*

Solution. — Soit ABC (fig. 105) le triangle donné, dans lequel les points P, Q ont été pris à volonté; M désigne la valeur moyenne de la surface de PQC. Si l'on joint le milieu D de AB avec C et désigne par M' la valeur moyenne de PQC, lorsque P et Q se trouvent de côté et d'autre de CD, par M'' la même valeur moyenne, lorsque P et Q se trouvent du même côté de CD, en vertu de la proposition du n° 154, est

Fig. 105.



$$2\ M = M' + M'';$$

maintenant manifestement $M'' = \frac{1}{2}\ M$, parce que $\Delta ADC = \Delta DBC = \frac{1}{2}\ \Delta ABC$; par conséquent

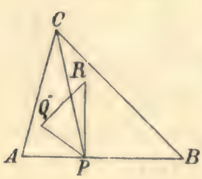
$$M = \frac{2}{3} M',$$

et comme enfin (suivant le n° 199) M' égale la surface du triangle formé en unissant les centres de gravité de ADC et de DBC avec C et par suite M' égale $\frac{2}{9} \varDelta ABC$, on a

$$M = \frac{4}{27} \varDelta ABC.$$

201. **Problème XLV.** — *Dans la surface d'un triangle donné, deux points sont pris arbitrairement et avec un point quelconque d'un des trois côtés ces points sont reliés en un triangle; déterminer la surface moyenne de ce triangle.*

Fig. 106.



Solution. — La surface moyenne correspondant à une position particulière, caractérisée par $AP = x$, du point P dans le côté AB (fig. 106) est M_x. Si l'on sépare les cas dans lesquels Q, R se trouvent l'un et l'autre dans le triangle APC, l'un et l'autre dans le triangle PBC, enfin chacun d'eux dans un de ces triangles, et désigne les valeurs moyennes respectives par M_1, M_2, M_3, la proposition du n° 154 conduit à l'équation

$$1)\quad (\varDelta ABC)^2 M_x = (\varDelta APC)^2 M_1 + (\varDelta PBC)^2 M_2 + 2\varDelta APC \cdot \varDelta PBC \cdot M_3.$$

Maintenant, on a (v. le n° 200)

$$M_1 = \frac{4}{27} \varDelta APC, \qquad M_2 = \frac{4}{27} \varDelta PBC,$$

puis (suivant la proposition du n° 199)

$$M_3 = \frac{1}{9} \varDelta ABC;$$

lorsqu'on introduit ces valeurs dans l'équation 1), il vient

$$(\varDelta ABC)^2 M_x = \frac{4}{27} (\varDelta APC)^3 + \frac{4}{27} (\varDelta PBC)^3 + \frac{2}{9} \varDelta APC \cdot \varDelta PBC \cdot \varDelta ABC,$$

ou lorsqu'on exprime les surfaces séparées des triangles au moyen de $AP = x$, de $AB = c$ et de la hauteur h du triangle ABC, dont la superficie peut être représentée par J, on obtient

$$2)\quad J^2 M_x = \left(\frac{h}{2}\right)^3 \left\{ \frac{4}{27} x^3 + \frac{4}{27} (c-x)^3 + \frac{2}{9} cx(c-x) \right\}.$$

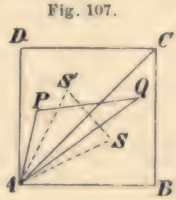
La valeur moyenne requise étendue à toutes les positions de P dans AB est

$$3)\quad M = \frac{\int_0^c J^2 M_x\, dx}{c J^2} = \frac{1}{c J^2}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \int_0^c \left\{ \frac{4}{27} x^3 + \frac{4}{27}(c-x)^3 + \frac{2}{9} c x (c-x) \right\} dx = \frac{1}{9} J.$$

202. **Problème XLVI**. — *Dans la surface d'un carré donné deux points sont pris arbitrairement et, a) avec un sommet, b) avec le centre du carré, sont reliés en un triangle; déterminer la surface moyenne des deux triangles successivement formés.*

Solution. — a) Le carré est décomposé par la diagonale AC (fig. 107) en triangles et M', M'' se rapportent aux cas dans lesquels P, Q se trouvent de côté et d'autre de AC et se trouvent du même côté de AC; conformément à la proposition du n° 154, est

Fig. 107.

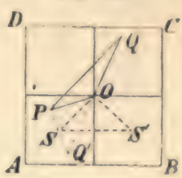


$$2M = M' + M'';$$

puis on a $M' = \Delta ASS' = \frac{1}{6}$ du carré (S, S' sont les centres de gravité des triangles ABC, ADC), $M'' = \frac{4}{27} \Delta ABC = \frac{2}{27}$ du carré (v. le n° 200); par conséquent $M = \frac{13}{108}$ du carré.

b) On décompose le carré, du centre du carré, en quatre carrés égaux (fig. 108); alors trois groupes de cas se différencient :

Fig. 108.



1. P, Q se trouvent dans le même carré; soit M' la valeur moyenne du triangle;

2. P, Q se trouvent dans deux carrés différents situés l'un à côté de l'autre; soit M'' la valeur moyenne du triangle;

3. P, Q se trouvent dans deux carrés opposés diagonalement; soit M''' la valeur moyenne du triangle.

Si la surface du carré donné $ABCD$ est prise pour unité, il existe entre ces trois valeurs moyennes et la valeur moyenne requise M la relation suivante :

$$1^2 \cdot M = 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 M' + 4 \cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 M'' + 2 \cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 M''',$$

ou

1) $$M = \frac{1}{4} M' + \frac{1}{2} M'' + \frac{1}{4} M'''.$$

M' et M''' sont égaux en grandeur, puisqu'à chaque triangle OPQ de la troisième espèce correspondant un triangle de même aire de la première espèce; l'équation ci-dessus se simplifie donc ainsi

2) $$M = \frac{1}{2}(M' + M'').$$

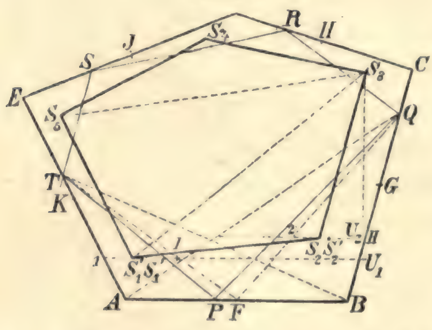
Mais en vertu du cas a), $M' = \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{108}$, $M'' \varDelta OSS' = \frac{1}{16}$; par conséquent

3) $$M = \frac{5}{108}$$

du carré donné.

203. **Problème XLVII.** — *Dans chaque côté d'un polygone donné de* n *côtés, un point est pris arbitrairement; en unissant les point produits, dans l'ordre circulaire, un second polygone de* n *côtés prend naissance, qui, du polygone donné, découpe* n *triangles. Dans chacun de ces triangles, est choisi de nouveau un point. Trourer l'aire moyenne du polygone de* n *côtés formé par l'union des derniers points.*

Fig. 109.



Solution. — Soit $ABCDE$ (fig. 109) le polygone donné, $PQRST$ le polygone premièrement inscrit. On prend à volonté dans les triangles ATP, BPQ, CQR, DRS, EST les points U, V, W, X, Y, dans leur ordre; conformément à la proposition du nº 199, lorsque $PQRST$ DEMEURE FIXE, le polygone $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5$, qui est formé par la jonction des centres de gravité des triangles dénommés, représente la surface moyenne de $UVWXY$.

A présent, les points P, Q, R, S, T peuvent s'envisager comme variables aussi et premièrement le point P seul dans AB; alors, les points S_1, S_2 varient simultanément; du polygone $S_1 \ldots S_5$, le quadrilatère $S_5 S_1 S_2 S_3$ est donc variable et atteint, comme actuellement ce doit être montré, sa surface moyenne lorsque P coïncide avec le milieu F de AB.

Les centres de gravité S_1, S_2 se meuvent, pendant la mutation de P, sur des droites parallèles à AB; les chemins qu'ils parcourent se trouvent facilement. Si P tombe en A ou tombe infiniment proche de A, le centre de gravité du triangle APT se trouve en 1 (de manière que $A\,1 = \frac{1}{3}\,AT$), celui du triangle BPQ en 2 (centre de gravité de ABQ). En échange, si le point P vient en B, le centre de gravité du triangle APT se trouve en I (centre de gravité de ABT), celui du triangle BPQ en II (de manière que $BII = \frac{1}{3}\,BQ$). Les centres de gravité S_1, S_2 se meuvent donc le long de l'étendue $1\,I$, $2\,II$, respectivement, et leurs positions sont réparties uniformément sur cette étendue comme celles de P sur AB.

Il en résulte immédiatement que la surface moyenne du triangle $S_5 S_1 S_3$ est représentée par le triangle $S_5 S'_1 S_3$, dans lequel S'_1 est le milieu de $1\,I$; pour cette position de S_1, P tombe en F.

Aussi le triangle $S_1 S_2 S_3$ atteint sa valeur moyenne, lorsque S_1, S_2 coïncident avec les milieux S'_1, S'_2 de $1\,I$, de $2\,II$, car

$$\varDelta\, S_1 S_2 S_3 = \varDelta\, S_3 U_1 S_1 - \varDelta\, S_3 U_2 S_2 - U_1 S_1 S_2 U_2,$$

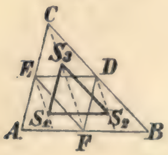
et tous les termes du second membre prennent simultanément leur valeur moyenne respective lorsque S_1, S_2 tombent en S'_1, S'_2.

Par la même voie, il peut être montré que le polygone $S_1 \ldots S_5$, pour toutes les positions des points P, Q, R, S, T sur les côtés correspondants du polygone donné, parvient à sa surface moyenne lorsque ces points coïncident avec les milieux F, G, H, J, K des côtés.

Avec la prise en considération du n° 191, se réalise, par cela, le fait remarquable que les surfaces des polygones $PQRST$ et $UVWXY$ atteignent simultanément leur valeur moyenne.

Premier exemple. — La figure donnée est un triangle (fig. 110) de surface J; $M = \frac{1}{4} J$.

Fig. 110.



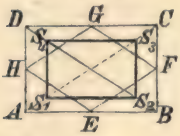
Deuxième exemple. — La figure donnée est un quadrilatère (fig. 111), dont la surface est J; on a

$$M = \frac{4}{9} J.$$

Troisième exemple. — La figure donnée est un polygone régulier de n côtés (fig. 112) dont le côté est a et dont l'aire est J; on obtient

$$M = \left(\frac{S_1 S_2}{a}\right)^2 J;$$

Fig. 111.



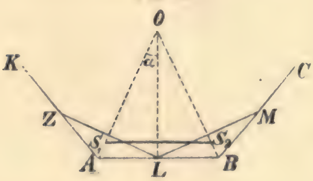
comme $S_1 S_2 = a - \frac{2}{3} a \sin^2 \alpha$, est

$$\left(\frac{S_1 S_2}{a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \alpha\right)^2 = 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha + \frac{4}{9} \sin^4 \alpha = \frac{1}{9} (8 \sin^2 \alpha + \cos^2 2\alpha),$$

par conséquent, enfin,

$$M = \frac{1}{9}\left(8 \sin^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n}\right) J.$$

Fig. 112.



204. **Problème XLVIII.** — *Dans l'aire d'un triangle donné, trois points sont pris arbitrairement et reliés en un triangle; déterminer la surface moyenne de celui-ci.*

Solution. — Le triangle donné est ABC; son aire, J; le triangle variable, PQR; la valeur moyenne demandée, M. La somme des triangles PQR, c'est MJ^3, croît de $d\,(MJ^3)$, lorsqu'on augmente le triangle ABC d'un élément dJ limité par le côté AB et par une parallèle à celui-ci, à distance infiniment petite; et le changement de la somme mentionnée consiste en la somme des triangles PQR qui ont une extrémité dans l'élément dJ (ou dans le côté AB); ce changement est par conséquent, lorsque la valeur moyenne de ces triangles particuliers est désignée par M', égale à $3\,M'\,J^2\,dJ$.

Entre M et M', existe donc l'équation

$$d\,(MJ^3) = 3\,M'\,J^2\,dJ$$

ou

$$d\left(\frac{M}{J}J^4\right)=3\,M'\,J^2\,dJ,$$

et comme $\frac{M}{J}$ est constant, se donne, après l'exécution de la différentiation du premier membre,

$$M=\frac{3}{4}\,M'.$$

Si l'on remplace M' par la valeur trouvée au n° 201, équation 3), on obtient finalement

$$M=\frac{1}{12}\,J.$$

Remarque. — La question, déterminer la probabilité pour que quatre points P, Q, R, S désignés arbitrairement dans la surface d'un triangle donné déterminent un quadrilatère convexe, trouve dans la résolution de problème ci-dessus sa solution la plus simple.

On désigne par J la surface du triangle donné, par V la surface du triangle déterminé par trois points quelconques des quatres points, par exemple par P, Q, R; la probabilité pour que le quatrième point S tombe dans le triangle PQR ou pour que les quatre points déterminent un quadrilatère avec angle rentrant, conformément à la proposition du n° 175, est

$$q=4\,\frac{M(V)}{J},$$

c'est, avec l'aide de la valeur trouvée plus haut pour $M(V)$,

$$q=\frac{1}{3};$$

par là, se donne la probabilité demandée

$$p=\frac{2}{3}.$$

205. **Problème XLIX.** — *Dans l'aire d'une courbe plane, convexe, fermée, trois points sont pris arbitrairement et reliés en un triangle; calculer l'aire moyenne de celui-ci.*

Solution. — L'aire du triangle PQR est désignée par V, sa valeur moyenne par $M(V)$ et un quatrième point S est pris à volonté dans l'aire de la courbe; ce point tombe, en vertu de la proposition du n° 175, avec la probabilité

1) $$\Pi = \frac{M(V)}{J}$$

dans le triangle PQR lorsque J désigne l'aire de la courbe.

Pour la même probabilité, l'expression

2) $$\Pi = 1 - \frac{1}{J^4} \int\int C^3 \Sigma^2 \, dp \, d\theta$$

a été trouvée au n° 126, équation 6); dans cette expression, C indique la longueur de la corde (de la courbe) dont la position est déterminée par les coordonnées polaires p, θ; Σ, le segment de la surface, d'un côté de cette corde; l'intégration est à étendre à toutes les cordes et de plus Σ est à prendre toujours du même côté de la corde.

Par l'égalité de 1) et de 2), s'obtient la valeur moyenne requise

3) $$M(V) = J - \frac{1}{J^3} \int\int C^3 \Sigma^2 \, dp \, d\theta.$$

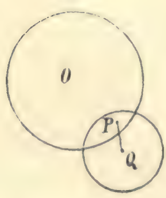
Pour un cercle de rayon r, par exemple, l'intégrale double [v. n° 125, équation 4)] a la valeur

$$\pi^2 r^8 \left(\pi^2 - \frac{35}{48}\right);$$

la surface moyenne du triangle formé par trois points pris à volonté dans l'aire de ce cercle égale donc

$$M = \frac{35 r^2}{48 \pi}.$$

Fig. 113.



206. **Problème L.** — *Sur un cercle fixe, donné, un second cercle est jeté arbitrairement; trouver l'aire moyenne de la surface du premier cercle, couverte par le second.*

Solution. — Soit O (fig. 113) le centre, R le rayon du cercle fixe, Q le centre, r le rayon du cercle jeté, V la surface commune aux deux cercles.

Une surface commune se présente seulement lorsque Q vient à se trouver dans l'intérieur d'un cercle décrit de O comme centre avec le rayon $R + r$, et ces seules positions de Q doivent être prises en considération.

Dans la surface du cercle fixe, un point est pris à volonté : conformément à la proposition du n° 175,

$$1) \qquad p = \frac{M(V)}{\pi R^2}$$

est la probabilité pour que ce point tombe dans la surface commune aux deux cercles.

Cet événement peut être interprété aussi comme suit : Q, après que P a été pris, vient à se trouver à une distance de P, plus petite que r, et avec cette interprétation, la probabilité s'exprime

$$2) \qquad p = \frac{\pi r^2}{\pi (R + r)^2} = \left(\frac{r}{R + r}\right)^2.$$

De l'égalité de 1) et de 2), résulte la valeur moyenne exigée

$$3) \qquad M(V) = \pi R^2 \left(\frac{r}{R + r}\right)^2.$$

Lorsque les cercles sont également grands, un quart du cercle fixe est moyennement couvert par le cercle mobile. [1]

207. **Problème LI**. — *Un disque, dont le périmètre est formé par une courbe convexe, a été jeté sur un plan dans lequel, par deux droites parallèles, une bande est délimitée. La surface moyenne de la partie couverte de la bande par le disque est à trouver, supposé que ne soient comptés que les cas où le disque rencontre réellement la bande tracée.*

Solution. — Soit J la surface du disque, s la longueur de son périmètre (L), a la largeur de la bande parallèle dans le plan, V la surface couverte par le disque. La probabilité pour qu'un point P (fig. 114, p. 244) désigné arbitrairement sur le disque vienne se placer aussi sur la bande est

$$1) \qquad p = \frac{M(V)}{J}.$$

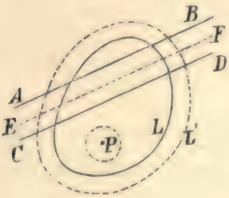
Cet événement peut aussi être énoncé ainsi : la bande parallèle jetée sur le disque fixe s'approprie le point P. Pour trouver l'expression correspondant à cette interprétation,

---

[1] Y comp. le n° 176.

de la probabilité, on considère qu'un cas favorable arrive lorsque la ligne moyenne EF de la bande coupe un cercle décrit de P comme centre avec le rayon $\frac{1}{2}a$, pendant que sont à compter comme possibles les cas où EF coupe une courbe L' parallèle à L à la distance $\frac{1}{2}a$ de L. Comme la longueur de la courbe L' égale $s + \pi a$ (¹), en vertu du nº 81, est

Fig. 114.



$$2) \qquad p = \frac{\pi a}{s + \pi a}.$$

Par l'égalité des expressions 1) et 2), on obtient la valeur moyenne exigée

$$3) \qquad M(V) = \frac{\pi a}{s + \pi a} J.$$

Le disque est circulaire et r est son rayon, on a

$$M(V) = \frac{a}{2r + a} \pi r^2,$$

spécialement pour $a = 2r$,

$$M(V) = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

(¹) Si $GH = ds$ (fig. 115) est un élément de la courbe L, les normales $GG' = HH' = \frac{a}{2}$ des extrémités de cet élément délimitent un élément $G'H' = ds'$ de la courbe parallèle L'. Lorsqu'on mène $HH'' \parallel GG'$, $G'H'$ est divisé en deux parties, et, avec abandon des grandeurs infiniment petites d'ordre plus élevé est

Fig. 115.

$$G'H'' = GH = ds, \quad H''H' = \frac{a}{2} d\Theta;$$

par conséquent,

$$ds' = ds + \frac{a}{2} d\Theta;$$

par intégration, résulte de cette expression la longueur de la courbe parallèle

$$s' = s + \frac{a}{2} 2\pi = s + \pi a.$$